

# Chapitre 1

## STATIQUE DES FLUIDES ET DYNAMIQUE DES ÉCOULEMENTS

### 1.1. Pression au centre de la Terre ★

La Terre est supposée homogène et sphérique de rayon  $R \simeq 6,4 \cdot 10^3$  km. On néglige sa rotation. Le champ de pesanteur en surface, confondu avec le champ de gravitation, est  $g_0 \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et la constante de gravitation universelle est  $\mathcal{G} \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Grâce à une analogie formelle entre force de Coulomb et force de gravitation, donner l'équivalent du théorème de Gauss pour la gravitation.
2. En déduire la masse  $M$  et la masse volumique moyenne  $\rho$  de la Terre.
3. En assimilant la Terre à une masse fluide incompressible en équilibre hydrostatique, calculer la pression en son centre.
4. La valeur admise dans la communauté scientifique pour la pression centrale est  $3,6 \cdot 10^{11}$  Pa. Comment expliquer l'écart avec le résultat de la question précédente ?

#### ► Corrigé

*L'analogie entre gravitation et électrostatique est abondamment utilisée. Le champ de gravitation peut, dans les cas où les symétries sont suffisantes, être calculé par le théorème de Gauss gravitationnel.*

#### Méthode

#### Analogies

Pour mettre en évidence les analogies entre deux lois, le plus pratique est de les mettre en parallèle dans un tableau.

1. On peut dresser un tableau d'analogies entre les deux forces fondamentales. Le vecteur  $\vec{u}_{12}$  est unitaire, dirigé du point  $M_1$  vers le point  $M_2$  (voir tableau 1.1.1). La constante fondamentale  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  de l'électrostatique est remplacée par la constante  $-\mathcal{G}$  de la gravitation<sup>1</sup>. Par conséquent,  $\frac{1}{\epsilon_0}$  doit être remplacée par  $-4\pi\mathcal{G}$  et le théorème de Gauss pour l'électrostatique

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \text{ a pour analogue } \oiint_{\mathcal{S}} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}},$$

où  $\vec{g}$  est le champ de gravitation et  $M_{\text{int}}$  la masse contenue dans la surface fermée  $\mathcal{S}$ .

2. La rotation de la Terre étant négligée, le champ de pesanteur est égal au champ de gravitation à la surface de la Terre,  $\vec{g} = -g_0 \vec{u}_r$ . On applique le théorème de Gauss à la surface de la Terre, qui est une sphère de rayon  $R$ . On doit l'orienter vers l'extérieur

1. La différence majeure entre les deux lois est la suivante : la force gravitationnelle est toujours attractive tandis que la force électrostatique peut être attractive ou répulsive selon que les charges sont de signes opposés ou de même signe.

Électrostatique	Gravitation
$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^2} \vec{u}_{12}$	$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{M_1 M_2^2} \vec{u}_{12}$
$q_1$ et $q_2$	$m_1$ et $m_2$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-\mathcal{G}$
$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}$	$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{g}$
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{M_1 M_2^2} \vec{u}_{12}$	$\vec{g} = -\mathcal{G} \frac{m_1}{M_1 M_2^2} \vec{u}_{12}$

TABLEAU 1.1.1. Analogies entre les forces de gravitation et électrostatique. pour l'application du théorème, donc, en coordonnées sphériques,  $d\vec{S} = +dS \vec{u}_r$ .

$$\iint_{\mathcal{S}} -g_0 \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = -4\pi\mathcal{G}M \Rightarrow -4\pi R^2 g_0 = -4\pi\mathcal{G}M$$

$$\Rightarrow M = \frac{g_0 R^2}{\mathcal{G}} \simeq 6,1 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

La masse volumique moyenne de la Terre est donc  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \simeq 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

3.

### Méthode

### Champ de pression en régime statique

Pour déterminer la pression en un point, il faut en général établir le champ de pression par intégration de la relation de l'hydrostatique,  $-\vec{g}\text{grad} P + \rho\vec{g} = \vec{0}$ .

La relation de l'hydrostatique s'écrit  $-\vec{g}\text{grad} P + \rho\vec{g} = \vec{0}$ , où  $\vec{g} = g(r) \vec{u}_r$  est le champ de pesanteur au lieu de rayon  $r$ . En projetant sur le vecteur unitaire radial  $\vec{u}_r$ ,  $-\frac{dP}{dr} + \rho g(r) = 0$ . Par ailleurs,  $g(r)$  se calcule par le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon  $r$  orientée vers l'extérieur,

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi\mathcal{G}\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow g(r) = -\frac{\mathcal{G}M}{R^3} r.$$

En reportant  $g(r)$  dans l'équation de la statique,  $\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{\mathcal{G}M}{R^3} r$ . Cela s'intègre entre  $R$  (où l'on connaît la pression qui est environ de  $10^5$  Pa) et un point  $r$  quelconque dans la Terre. Le profil de pression dans la Terre est donc

$$P(r) = P(R) - \rho \frac{\mathcal{G}M}{2R^3} (r^2 - R^2) \Rightarrow \text{au centre, } P(0) = P(R) + \rho \frac{\mathcal{G}M}{2R} \simeq 1,7 \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$

4. La masse volumique de la Terre n'est pas uniforme, donc le champ de gravitation issu du théorème de Gauss reste sous la forme d'une intégrale,

$$g(r) = -\frac{\mathcal{G}}{r^2} \int_{r=0}^r \rho(r) 4\pi r^2 dr.$$

La composition de la Terre est connue par l'étude des ondes sismiques. Le profil de masse volumique est donc aussi (approximativement) connu. La densité étant grande au centre ( $d \simeq 13$ ), le champ de gravitation croît plus vite avec  $r$  que dans le modèle uniforme. L'intégration numérique de l'équation de l'hydrostatique avec le profil correct de masse volumique donne la valeur annoncée.

## 1.2. Pression dans une rivière ★

Dans une rivière, l'écoulement est permanent et les lignes de courant sont approximativement horizontales. En dehors des zones d'étranglement, le champ de vitesse est approximativement uniforme,  $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0 \vec{u}_x$ , où  $v_0$  est une constante. La surface libre, supposée horizontale, sert d'origine pour l'axe vertical ascendant  $y$ . Donner l'expression du champ de pression dans la rivière.

### ► Corrigé

#### Méthode

#### Champ de pression en régime dynamique

En dynamique comme en statique des fluides, le champ de pression est rarement obtenu directement. On peut passer par l'intégration spatiale d'une expression de  $\overline{\text{grad}} P$ , qui intervient dans la loi de la quantité de mouvement écrite pour une particule mésoscopique de fluide.

Le champ de vitesse de l'eau est supposé uniforme dans la rivière, ce qui signifie que les effets visqueux au fond et sur les bords sont négligés. Dans le référentiel terrestre, la loi de la quantité de mouvement appliquée à une particule mésoscopique de fluide de volume  $d\tau$  s'écrit

$$\rho d\tau \vec{a} = -(\overline{\text{grad}} P) d\tau + \rho d\tau \vec{g}.$$

Le champ de vitesse donné correspond à un mouvement rectiligne uniforme des particules d'eau, donc l'accélération est  $\vec{a} = \vec{0}$ . En simplifiant par  $d\tau$ , l'équation se réduit à  $-\overline{\text{grad}} P + \rho \vec{g} = \vec{0}$ , comme en statique des fluides. En notant  $P_0$  la pression de l'air surmontant la rivière, cette équation s'intègre en  $P(x,y,z,t) = P_0 - \rho g y$ . Ce résultat est analogue à celui que l'on trouverait dans un lac (eau immobile).

## 1.3. Pression dans un jet d'eau ★

On considère un jet d'eau sortant d'une fontaine et s'écoulant à l'air libre sans rencontrer d'obstacle. Déterminer la pression dans l'eau du jet.

### ► Corrigé

L'expérience montre que la forme d'un jet d'eau qui ne rencontre pas d'obstacle est parabolique (voir figure 1.3.1), ce qui est caractéristique d'un mouvement à accélération constante. Les particules d'eau ont un mouvement de chute libre ( $\vec{a} = \vec{g}$ ).

Par ailleurs, la loi de la quantité de mouvement appliquée à une particule mésoscopique de fluide de volume  $d\tau$  dans le référentiel terrestre s'écrit

$$\rho d\tau \vec{a} = -(\overline{\text{grad}} P) d\tau + \rho d\tau \vec{g}.$$



FIG. 1.3.1. Jets d'eau sortant d'une fontaine. La forme des jets est parabolique.

L'ensemble des deux relations conduit à  $-\overrightarrow{\text{grad}} P = \overrightarrow{0}$ , ce qui signifie que la pression est uniforme dans l'eau du jet. Par continuité de la pression à l'interface eau-air, la pression dans le jet est la pression ambiante  $P_0$ .

#### 1.4. Calcul de débit ★

On considère un écoulement d'eau dans un tuyau cylindrique de rayon  $R$  et d'axe  $z$ . On admet que le champ de vitesse, dans le référentiel du tuyau, s'écrit, en coordonnées cylindriques,

$$\vec{v}(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u}_z \quad \text{où } v_0 > 0.$$

1. Représenter le profil de vitesse sur une section.
2. Calculer le débit volumique d'eau à travers une section droite du tuyau.
3. Définir et exprimer la vitesse moyenne  $v_d$  sur une section de l'écoulement (on parle de vitesse débitante).

#### ► Corrigé

1. Pour représenter un profil de vitesse, on trace quelques lignes de courant (ici, des droites parallèles à  $\vec{u}_z$ ), puis une orthogonale commune à ces lignes (ici, un segment orthogonal à  $\vec{u}_z$ ). En quelques points de cette orthogonale commune, on trace des vecteurs vitesse. Le profil de vitesse (parabolique) est représenté sur la figure 1.4.1.

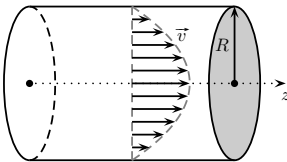


FIG. 1.4.1. Profil de vitesse dans le tuyau.

2.

#### Méthode

#### Calcul de débit

Un débit  $\phi$  à travers une section macroscopique est une somme de débits infinitésimaux. Il faut donc commencer par exprimer le débit volumique  $d\phi = \vec{v} \cdot d\vec{S}$  à travers une surface mésoscopique, puis en faire la somme (intégrale).

Le champ de vitesse étant invariant par translation selon  $z$ , on peut se contenter de travailler en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Une section droite du tuyau est un cercle de rayon  $R$  et d'axe  $z$ . Un élément de surface de cette section droite, situé autour du point de coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$ , a pour aire  $dS = r d\theta dr$  (voir figure 1.4.2).

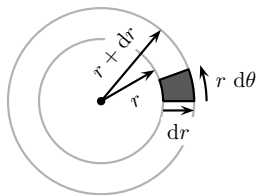


FIG. 1.4.2. Élément de surface en coordonnées polaires.

On choisit (arbitrairement) de l'orienter selon la direction  $+\vec{u}_z$ , donc de lui associer le vecteur surface élémentaire  $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{u}_z$ . Le débit volumique élémentaire à travers cette surface est, par définition, le flux du champ de vitesse,

$$d\phi_v = \vec{v}(r) \cdot d\vec{S} = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\theta.$$

Le débit  $\phi_v$  à travers la section s'obtient en intégrant de 0 à  $2\pi$  sur la variable  $\theta$ , et de 0 à  $R$  sur la variable  $r$ ,

$$\phi_v = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} d\phi_v = 2\pi v_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R \Rightarrow \phi_v = v_0 \times \frac{1}{2} \pi R^2. \quad (1.4.1)$$

Ce débit volumique est inférieur à  $v_0 \pi R^2$ , ce qui est logique car la norme de la vitesse est inférieure à  $v_0$  sur toute la section, dont l'aire est  $\pi R^2$ .

**3.** La vitesse débitante  $v_d$  d'un écoulement est la norme d'un champ de vitesse (fictif) uniforme sur la section du tuyau, qui aurait le même débit que l'écoulement réel. Avec cette définition,  $\phi_v = v_d \times \pi R^2$ , soit, en identifiant avec l'équation (1.4.1),  $v_d = \frac{1}{2} v_0$ .

La vitesse débitante correspond à la valeur moyenne du champ de vitesse sur la section du tuyau.

## 1.5. Homme qui court sous la pluie ★★

On travaille dans la base orthonormée directe  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , le vecteur  $\vec{u}_z$  pointant selon la verticale ascendante.

La pluie, assimilée à un milieu continu de masse volumique uniforme  $\rho$ , tombe verticalement avec la vitesse  $-U \vec{u}_z$  mesurée dans le référentiel du sol ( $U > 0$ ). Un homme est assimilé à un parallélépipède de dimensions  $h \times L \times \ell$ , où :

- ▶  $h$  est la hauteur de l'homme ;
- ▶  $L$  est sa largeur d'épaules ;
- ▶  $\ell$  est son « épaisseur » du dos jusqu'au ventre.

L'homme, qui n'a ni parapluie ni vêtements imperméables, doit parcourir une distance  $d$  dans la direction horizontale  $\vec{u}_x$ .

**1.** En supposant qu'il se déplace à la vitesse constante  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  (avec  $v > 0$ ), quelle est la masse d'eau reçue par l'homme au cours de son trajet ? À quelle vitesse doit-il se déplacer s'il veut être le moins mouillé possible ? Interpréter le résultat.

**2.** Même question si la vitesse de la pluie, dans le référentiel terrestre, possède une composante supplémentaire  $V > 0$  dans la direction  $\vec{u}_x$ .

### ▶ Corrigé

**1.** Dans le modèle adopté, « l'homme se mouille » se traduit par « de l'eau entre dans le parallélépipède », noté  $\mathcal{P}$  dans la suite. Le problème revient à calculer le débit

massique d'eau entrant dans  $\mathcal{P}$ . Pour cela, il faut exprimer la vitesse de l'eau *dans le référentiel de  $\mathcal{P}$*  en appliquant la relation de composition des vitesses,

$$\vec{v}_{\text{pluie/homme}} = \vec{v}_{\text{pluie/sol}} - \vec{v}_{\text{homme/sol}}, \text{ soit } \vec{v}_p = (-v, 0, -U).$$

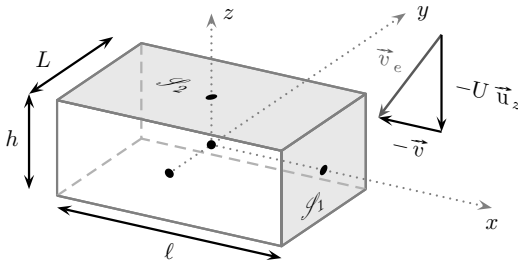
## Méthode

## Débit et référentiel

Un débit volumique se calcule à travers une surface  $\mathcal{S}$  par

$$D_v = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{v}_{/\mathcal{S}}(M, t) \cdot \vec{dS}_M$$

où  $\vec{v}_{/\mathcal{S}}$  est le champ de vitesse *exprimé dans le référentiel où la surface est fixe*. Il faut donc commencer par effectuer un changement de référentiel (loi de composition des vitesses) dans le cas où la surface étudiée est mobile par rapport au référentiel terrestre.



**FIG. 1.5.1. Schématisation de l'homme sous la pluie.** Le vecteur  $\vec{v}_p$  représente la vitesse de la pluie dans le référentiel où le parallélépipède est immobile.

Les grandeurs  $v$  et  $U$  étant positives, l'eau tombe vers le bas et vers la gauche, ce qui signifie qu'elle n'entre dans  $\mathcal{P}$  que par la face avant  $\mathcal{S}_1$  et la face supérieure  $\mathcal{S}_2$ . Il ne faut pas compter un éventuel débit sortant par la face arrière car l'eau est arrêtée par le corps de l'homme : elle se stocke dans ses vêtements. En notant  $\vec{dS}$  les vecteurs surfaces élémentaires *entrant* dans  $\mathcal{P}$ , le débit massique entrant cherché s'écrit

$$D_m = \iint_{\mathcal{S}_1} \rho \vec{v}_p \cdot \vec{dS} + \iint_{\mathcal{S}_2} \rho \vec{v}_p \cdot \vec{dS} = \rho[vLh + U\ell L].$$

En se déplaçant à la vitesse  $v$ , l'homme doit rester sous la pluie durant  $t = \frac{d}{v}$ . La masse d'eau qu'il reçoit est

$$m = D_m \times t = \rho L \left[ h + \frac{U\ell}{v} \right] d.$$

Cette masse est une fonction strictement décroissante de  $v$  : pour être peu mouillé, il est donc préférable de courir le plus vite possible. Si  $v$  est nul,  $m$  tend vers l'infini car l'homme est toujours sous la pluie. La masse  $m$  est minimale quand l'homme court infiniment vite,  $m = \rho L h d$ . Cela représente la masse d'eau contenue dans le volume balayé par  $\mathcal{P}$  lors de son passage : l'homme collecte toutes les gouttes qui n'ont pas le temps de bouger s'il court très vite.

**2.** Lorsque la vitesse de la pluie a une composante supplémentaire  $V \vec{u}_x$  dans le référentiel terrestre (à cause du vent), la loi de composition des vitesses donne

$$\vec{v}_p = (V - v, 0, -U).$$

La composante de  $\vec{v}_p$  selon  $\vec{u}_z$  est inchangée, donc la contribution au débit entrant par la face supérieure  $\mathcal{S}_2$  reste  $\rho U L \ell$ . En revanche, le débit à travers la face orthogonale à  $\vec{u}_x$  est modifié.

- Si  $(V - v) < 0$ , la pluie frappe la face avant  $\mathcal{S}_1$  avec le débit massique  $-(V - v)Lh$ . Le ventre est mouillé.
- Si  $(V - v) > 0$ , la pluie frappe la face arrière avec le débit massique  $(V - v)Lh$ . Le dos est mouillé.

Dans les deux cas, le débit entrant total  $D_m(v)$  est la somme des débits vertical et horizontal. En multipliant ce débit par la durée  $t = \frac{d}{v}$ , on obtient la masse d'eau  $m(v)$  qui a frappé l'homme. La masse et le débit sont des fonctions de la vitesse  $v$ . On peut résumer l'étude dans un tableau de variations (en fonction de la variable  $v$ ), sachant que  $V > 0$ .

$v$	0	V			$+\infty$
$D_m(v)$	$\rho[U L \ell + (V - v)Lh]$	$\rho U L \ell$	$\rho[U L \ell + (v - V)Lh]$		
$m(v)$	$+\infty$	$\rho d L \frac{U \ell + V h - v h}{v}$	$\frac{\rho d L U \ell}{V}$	$\rho d L \frac{U \ell - V h + v h}{v}$	$\rho d L h$
$\frac{dm}{dv}$		-		$\left\{ \begin{array}{l} + \text{ si } V > \frac{U \ell}{h} \\ - \text{ si } V < \frac{U \ell}{h} \end{array} \right.$	

L'homme a toujours le sommet de la tête mouillé (terme en  $U$  dans l'expression de la masse  $m$ ).

- Si  $v < V$ , l'homme a le dos mouillé, mais  $m(v)$  décroît avec  $v$  pour  $v \in [0, V]$ . Il vaut mieux courir.
- Si  $v = V$ , l'homme court à la même vitesse que la vitesse horizontale de la pluie. Seul le sommet de sa tête est mouillé (présence du seul terme en  $U$  dans le débit).
- Si  $v > V$ , son ventre est mouillé. Le débit total peut croître ou décroître avec  $v$ , selon le signe de  $U \ell - V h$ . Cela traduit une compétition entre les débits entrant par  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Par exemple, si  $V < \frac{U \ell}{h}$ , il vaut mieux courir très vite pour diminuer  $m$ .

Dans tous les cas, on retrouve le fait que  $m$  tend vers  $\rho d L h$  lorsque  $v$  tend vers l'infini, comme à la première question. Alors, seul le ventre est mouillé et le sommet de la tête ne l'est pas (absence du terme en  $U$ ).

## 1.6. Tube de Venturi ★

Un tube de Venturi est constitué d'un rétrécissement qui sépare deux régions, de sections différentes  $S_A$  et  $S_B < S_A$ , d'une canalisation horizontale. Des tubes verticaux émergent de ces régions et sont ouverts sur l'air ambiant. De l'eau, de masse volumique  $\rho$ , est en écoulement permanent et supposé parfait dans la canalisation. On constate que les altitudes respectives  $z_A$  et  $z_B$  des surfaces libres d'eau ne sont pas les mêmes dans les deux premiers tubes verticaux.

1. Établir une relation entre  $(z_A - z_B)$  et la vitesse  $v_A$  du fluide dans la canalisation au niveau de la section  $S_A$ . Les hauteurs relatives des niveaux dans les tubes de la figure 1.6.1 sont-elles qualitativement correctes ?

2. La section de la canalisation au niveau du troisième tube vertical est  $S_C = S_A$ . On note  $z_C$  l'altitude de la surface libre dans ce troisième tube. Comment doit se

situer l'altitude  $z_C$  théorique par rapport à  $z_A$  ? Si on réalise l'expérience, comment est  $z_C$  par rapport à  $z_A$  ?

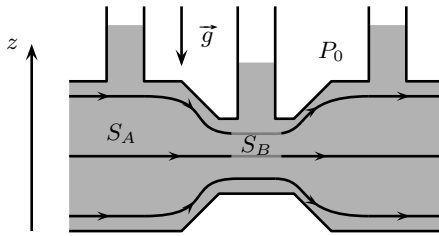


FIG. 1.6.1. Tube de Venturi.

► **Corrigé**

1. On note  $A'$  et  $B'$  les points de la ligne de courant centrale situés sous les deux premiers tubes (voir figure 1.6.2). Le théorème de Bernoulli s'écrit

$$P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} = P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} \Rightarrow P_{A'} - P_{B'} = \frac{\rho}{2}(v_{B'}^2 - v_{A'}^2). \quad (1.6.1)$$

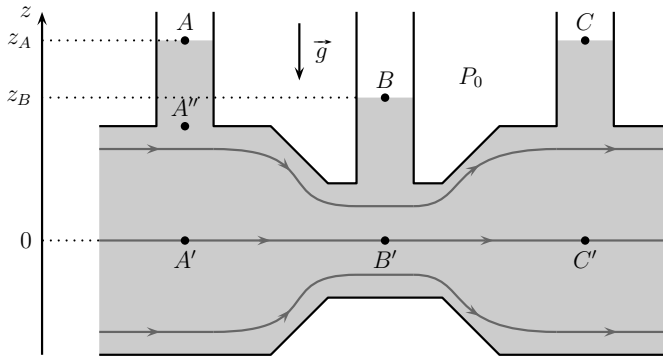


FIG. 1.6.2. Tube de Venturi.

L'hypothèse d'écoulement parfait implique que les lignes de champ sont quasiment parallèles au niveau de la section  $S_A$  (pas de turbulence). L'écoulement étant permanent, les particules de fluide sur cette section ont un mouvement rectiligne uniforme. Le champ de pression est donc de la même forme qu'en statique des fluides (voir exercice 1.2 page 3),

$$P_{A''} + \rho g z_{A''} = P_{A'} + \rho g z_{A'}. \quad (1.6.2)$$

Par ailleurs, le fluide dans les tubes verticaux est immobile, donc le champ de pression y vérifie aussi la loi de la statique des fluides,

$$P_A + \rho g z_A = P_{A''} + \rho g z_{A''}. \quad (1.6.3)$$

La pression est spatialement continue à la jonction entre un tube vertical et la canalisation, donc la pression  $P_{A''}$  est la même dans les deux équations (1.6.2) et (1.6.3).

### Méthode

### Continuité spatiale de la pression

La continuité spatiale de la pression est vraie en dynamique comme en statique. Il est fréquent de l'utiliser pour des points comme  $A''$  (point « intérieur-extérieur »).



En sommant ces deux relations membre à membre,

$$P_{A'} + \rho g z_{A'} = P_A + \rho g z_A \Rightarrow P_{A'} = P_0 + \rho g z_A. \quad (1.6.4)$$

Tout se passe comme si la loi de la statique était valable sur le segment  $A'A$ . Le même raisonnement peut être fait entre les points  $B$  et  $B'$ ,

$$P_{B'} + \rho g z_{B'} = P_B + \rho g z_B \Rightarrow P_{B'} = P_0 + \rho g z_B. \quad (1.6.5)$$

En soustrayant les deux relations (1.6.4) et (1.6.5) membre à membre,

$$P_{A'} - P_{B'} = \rho g (z_A - z_B). \quad (1.6.6)$$

Les relations (1.6.1) et (1.6.6) donnent  $\frac{\rho}{2}(v_{B'}^2 - v_{A'}^2) = \rho g (z_A - z_B)$ . Par ailleurs, la conservation du débit volumique le long de la canalisation s'écrit  $v_{A'} S_A = v_{B'} S_B$ , ce qui permet d'éliminer par exemple  $v_{B'}$  de l'équation précédente,

$$v_{A'}^2 \left( \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) = 2g(z_A - z_B) \Rightarrow v_{A'} = \sqrt{\frac{2g(z_A - z_B)}{\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}}.$$

La lecture de  $z_A - z_B$  permet de connaître  $v_{A'}$  : c'est le principe du débitmètre. L'analyse des signes montre que  $z_B < z_A$ . C'est l'effet Venturi : la pression est moindre dans l'étranglement, donc le fluide est moins maintenu vers le haut dans le tube vertical. Le dessin de l'énoncé est donc correct (voir figure 1.6.1).

**2.** Le théorème de Bernoulli, appliqué entre les points  $A'$  et  $C'$ , montre que  $P_{A'} = P_{C'}$ . Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente, on prévoit théoriquement que  $z_C = z_A$ . En réalité, l'écoulement subit une perte de charge par viscosité dans l'étranglement,

$$P_{A'} + \rho g z_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} > P_{C'} + \rho g z_{C'} + \rho \frac{v_{C'}^2}{2}.$$

Comme  $v_{A'} = v_{C'}$  par conservation du débit d'une part, et  $z_{A'} = z_{C'}$  d'autre part, il reste  $P_{A'} > P_{C'}$ , donc le niveau est moins élevé dans le tube vertical  $C$  que dans le tube vertical  $A$ .

## 1.7. Tube de Pitot ★

La figure 1.7.1 montre un tube de Pitot placé dans un écoulement d'air permanent et uniforme, à la vitesse constante  $\vec{v} = v \vec{u}_x$ , loin en amont du tube. Deux trous sont percés dans le tube : le trou  $A$  fait face à l'écoulement et le trou  $B$  est sur le côté du tube.

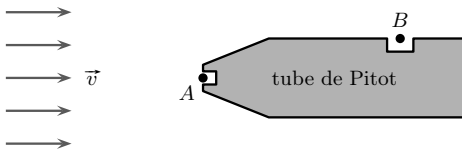


FIG. 1.7.1. Tube de Pitot.

Chaque trou mène sur une cavité bouchée, au fond de laquelle se trouve un capteur de pression.

**1.** En faisant les hypothèses simplificatrices nécessaires, montrer que la différence de pression  $P_A - P_B$  permet de connaître la norme de la vitesse  $\vec{v}$  et donner l'expression de  $v$ .

2. Ces trous portent les noms de « prise de pression dynamique » et « prise de pression statique ». Expliquer pourquoi.
3. Pour mesurer la vitesse d'un avion par rapport à l'air, la prise dynamique du tube de Pitot est fixée à quelques centimètres le long du fuselage (voir figure 1.7.2). Est-il légitime de considérer l'écoulement comme parfait ?

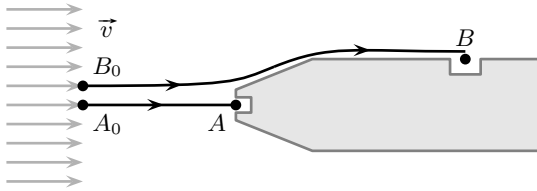


**FIG. 1.7.2. Tubes de Pitot.** Prises dynamiques de la sonde Pitot d'un Boeing 747. L'avion est équipé de plusieurs prises pour plus de sécurité.

4. Ce système, utilisé sur un avion pour mesurer sa vitesse par rapport à l'air, est-il fiable pour toute altitude et toute vitesse de vol ? Pourquoi est-il indispensable dans un avion ?

► **Corrigé**

1. Le point  $A$  est un point d'arrêt de l'écoulement car la cavité est bouchée. On considère deux lignes de courant passant respectivement par  $A$  et  $B$ . Elles proviennent de deux points voisins  $A_0$  et  $B_0$  situés loin en amont du tube (voir figure 1.7.3).



**FIG. 1.7.3. Tube de Pitot et lignes de courant.**

En faisant l'hypothèse d'écoulement parfait, on peut appliquer le théorème de Bernoulli sur chaque ligne de courant,

$$\begin{aligned} P_{A_0} + \rho \frac{v_{A_0}^2}{2} + \rho g z_{A_0} &= P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A \\ P_{B_0} + \rho \frac{v_{B_0}^2}{2} + \rho g z_{B_0} &= P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B. \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Les propriétés des points  $A_0$  et  $B_0$ , très voisins, sont identiques. En faisant la différence membre à membre des deux lignes, les termes de gauche s'annulent,

$$(P_A - P_B) + \frac{\rho}{2}(v_A^2 - v_B^2) + \rho g(z_A - z_B) = 0.$$

Le point  $A$  étant un point d'arrêt,  $v_A = 0$ . L'écoulement longe le tube, donc  $v_B = v$ . En pratique,  $z_A - z_B$  est de l'ordre du centimètre, donc le terme  $\rho g(z_A - z_B)$  est largement négligeable devant le terme de vitesse. Il reste

$$P_A - P_B = \frac{\rho}{2} v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_A - P_B)}. \quad (1.7.2)$$

2. La pression mesurée par le capteur  $B$  est indépendante de la vitesse de l'écoulement de l'air. En effet, l'équation (1.7.1) donne  $P_B = P_{B_0}$  qui est la pression de l'air ambiant à l'altitude de l'avion (« pression statique »). L'équation (1.7.2) montre que la cavité  $A$  ressent, en plus de la pression statique  $P_B$ , la pression dynamique  $\frac{1}{2}\rho v^2$  due à l'impact du fluide sur le point  $A$ . La cavité  $A$  est appelée « prise de pression dynamique ».

3. La couche limite le long du fuselage a une épaisseur de l'ordre du millimètre. Le tube de Pitot est donc en dehors, ainsi l'écoulement *incident* est sensiblement uniforme et parfait, ce qui légitime l'application du théorème de Bernoulli.

En revanche, une autre couche limite se développe le long du tube de Pitot. En toute rigueur, le point  $B$  de l'étude doit donc être un peu à l'extérieur de la cavité, hors de la couche limite pour travailler dans l'hypothèse d'écoulement parfait. En supposant cette couche limite laminaire (hypothèse simplificatrice), les particules de fluide ont un mouvement rectiligne uniforme, donc le champ de pression vérifie  $-\vec{g}\text{rad} P + \rho\vec{g} = \vec{0}$ , comme en statique (voir exercice 1.2 page 3 pour la justification). La pression dans la cavité  $B$  est donc quasiment celle au point  $B$  hors de la couche limite.

4. La vitesse donnée par l'équation (1.7.2) dépend de  $\rho$ , la masse volumique locale de l'air, qui diminue avec l'altitude. En altitude, la vitesse indiquée est donc supérieure à la vitesse réelle. Les pilotes connaissent la « recette » pour retrouver rapidement la vitesse réelle à partir de la vitesse indiquée. Pour éviter toute conversion, on peut utiliser l'équation d'état de l'air, assimilé pour simplifier à un gaz parfait. La pression pertinente à faire intervenir dans cette équation est la pression  $P_B$  car elle est égale à la pression ambiante de l'air à l'équilibre (une équation d'état n'a de sens qu'à l'équilibre).

$$P_B = \frac{\rho RT}{M} \stackrel{(1.7.2)}{\Rightarrow} v = \sqrt{\frac{2RT}{MP_B}(P_A - P_B)}$$

La pression  $P_B$  du dénominateur est mesurée par la prise statique du tube de Pitot. Un thermomètre mesure  $T$  et un calculateur dans l'avion se charge d'en déduire la vitesse.

L'étude a été faite dans l'hypothèse d'écoulement incompressible, qui n'est acceptable que pour un écoulement dont la vitesse est inférieure à environ 30% de la célérité du son. Le tube fonctionne encore pour des vitesses d'écoulement plus grandes, y compris supersoniques, mais l'expression (1.7.2) doit être remplacée par une autre plus compliquée.

Le tube de Pitot est un instrument vital pour les avions. Si l'une des deux prises de pression est bouchée, la vitesse indiquée par rapport à l'air devient fautive. Or, elle est fondamentale pour la sécurité : un avion doit voler entre une vitesse minimale (vitesse de décrochage) et maximale (déformation ou rupture de la structure de l'avion). Un pilote, même expérimenté, a du mal à se rendre compte de la vitesse de l'appareil en altitude à cause de l'absence de repères au sol. Sur les avions certifiés « vol aux instruments », on compte plusieurs tubes de Pitot (voir figure 1.7.2), tous équipés d'un système chauffant pour empêcher le bouchage par formation de givre. Un GPS ne saurait remplacer un tube de Pitot défectueux, car il indique la vitesse par rapport au sol alors que les vitesses pertinentes pour la sécurité de l'avion sont exprimées *par rapport à l'air*.

## 1.8. Un débitmètre rudimentaire ★

Dans une rivière, le champ de vitesse est horizontal, supposé uniforme près de la surface ( $\vec{v} = v \vec{u}_x$ ), et l'écoulement de l'eau est considéré comme parfait. On y plonge un tube courbé de section uniforme  $S$ , qui descend à la profondeur  $d$  et qui dépasse d'une hauteur  $H$ . L'axe  $z$  vertical ascendant a pour origine la surface libre de la rivière (voir figure 1.8.1).

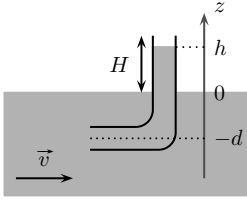


FIG. 1.8.1. Tuyau courbé plongé dans une rivière.

1. Dans un premier temps, on suppose que l'eau monte dans le tube jusqu'à la hauteur  $h < H$  au-dessus de la surface de la rivière. Établir la relation entre  $v$  et  $h$ .
2. À partir de quelle vitesse critique  $v_c$  d'écoulement de la rivière un jet d'eau peut-il se former au-dessus du tube? Jusqu'à quelle hauteur  $h'$  (au-dessus de la rivière) ce jet monte-t-il? Quelle est alors la vitesse de l'eau dans le tube?

### ► Corrigé

1. Le principe est analogue à celui d'une prise de pression dynamique d'un tube de Pitot (voir exercice 1.7 page 9). On applique le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant allant d'un point  $A$  loin en amont du tube (pour être sûr que  $v_A = v$ ) à un point  $B$  de la surface libre immobile dans le tube ( $P_B = P_0$ ,  $z_B = h$  et  $v_B = 0$ ),

$$P_A + \rho g z_A + \rho \frac{v^2}{2} = P_0 + \rho g h.$$

### Attention

#### Choix du point dans le théorème de Bernoulli

Les problèmes analogues à celui de cet exercice sont fréquents. Il ne faut jamais choisir le point  $A$  à l'entrée du tube, car l'écoulement est perturbé à cet endroit. Par exemple, ici, les lignes de courant de la rivière ne sont pas parallèles près de l'entrée du tube car l'écoulement de la rivière doit contourner l'entrée du tube, dans lequel l'eau n'avance pas (problème analogue à celui d'un bouchon dans le trafic automobile). Ainsi, juste avant l'entrée du tube, on ne connaît ni la vitesse ni la pression *a priori*. Il faut donc choisir le point  $A$  loin en amont du tube.

Par ailleurs, dans la zone où se trouve le point  $A$ , la rivière n'est pas perturbée par le tube : les particules d'eau ont un mouvement rectiligne uniforme, donc leur accélération est nulle. La loi de la quantité de mouvement appliquée à une particule mésoscopique d'eau mène à  $-\text{grad } P + \rho \vec{g} = \vec{0}$ , comme en statique (voir exercice 1.2 page 3 pour ce résultat).

**Attention****Champ de pression**

La relation  $-\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} = \vec{0}$  cesse d'être vraie près de l'entrée du tube, là où les lignes de courant de la rivière s'écartent pour la contourner. Dans cette zone, les particules mésoscopiques d'eau n'ont pas un mouvement rectiligne, donc leur vecteur accélération  $\vec{a}$  n'est pas nul, ce qui mène à  $-\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$  et modifie le champ de pression.

Par conséquent,  $P_A + \rho g z_A = P_0$ . En combinant cela au théorème de Bernoulli précédent,  $v = \sqrt{2gh}$ . Ce résultat ne dépend ni de  $d = -z_A$  ni de  $S$ .

2. Un jet peut se former si  $h > H$ , donc la vitesse critique de la rivière est  $v = \sqrt{2gH}$ . Quand le jet existe, on recommence l'étude précédente en prenant pour point  $B$  le point le plus haut du jet,  $P_B = P_0$ ,  $v_B = 0$  et  $z_B = h'$ . En gardant le même point  $A$ , le théorème de Bernoulli appliqué entre  $A$  et  $B$  donne  $h' = \frac{v^2}{2g}$ . On considère ensuite le point  $C$  situé à la sortie supérieure du tube sur la même ligne de courant que  $B$ . Dans cette zone, les particules d'eau ont pour accélération  $\vec{g}$  (approximation supposant qu'elles ne sont pas perturbées par les retombées du jet qui les surplombe), donc la loi de la quantité de mouvement appliquée à une particule mésoscopique d'eau donne  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$  (voir exercice 1.3 page 3 pour ce résultat). Ainsi  $P$  est uniforme dans cette zone,  $P_C = P_0$  par continuité à l'interface avec l'air ambiant. Par ailleurs,  $z_C = H$  et  $v_C$  est la vitesse de l'eau dans le tube (d'après la conservation du débit car il a une section uniforme). Le théorème de Bernoulli appliqué entre  $B$  et  $C$  s'écrit  $P_0 + \rho g H + \frac{\rho v_C^2}{2} = P_0 + \rho g h' \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h' - H)} \Rightarrow v_C = \sqrt{v^2 - 2gH}$ . L'eau va donc moins vite dans le tube que dans la rivière, ce qui est normal car le tube l'oblige à monter. On retrouve bien  $v_C = 0$  si  $h' = H$ , qui est le cas limite d'existence du jet. La section du tube n'intervient jamais dans les résultats. En réalité, le tube est responsable de frottements visqueux (cisaillement à l'entrée du tube, et aussi dans le tube quand le jet existe), donc les hauteurs  $h$  et  $h'$  calculées sont surestimées. Les calculs sont valables tant que  $S$  est assez grand pour que la viscosité joue peu. Enfin, on pourrait trouver la forme (approximative) du contour du jet d'eau émergent par la même méthode que dans l'exercice 1.10 page 15.

**1.9. Vidange d'un récipient ★**

On considère un récipient cylindrique de section horizontale  $S$  initialement rempli d'eau jusqu'à la hauteur  $h$ . En bas du récipient, on perce un trou de section  $s \ll S$ . L'écoulement est supposé parfait.

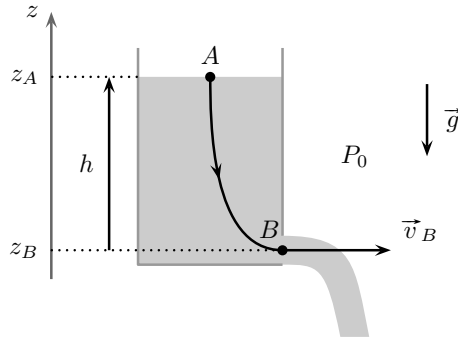
1. En précisant les approximations faites, déterminer la vitesse de l'eau à la sortie du récipient.
2. En déduire le temps nécessaire pour que le récipient se vide complètement.

**► Corrigé**

1. Puisque  $s \ll S$ , on peut se placer dans l'approximation de Torricelli : la durée de la vidange est très supérieure au temps d'établissement de l'écoulement (régime transitoire). Cela revient à supposer qu'à chaque instant, un régime permanent est établi.

Dans ce cas, en supposant l'écoulement parfait, on peut appliquer le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant  $AB$  allant de la surface au trou (voir figure 1.9.1). Les points  $A$  et  $B$  sont choisis aux extrémités car on y connaît la pression  $P_0$ . Le théorème s'écrit

$$P_0 + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = P_0 + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B.$$



**FIG. 1.9.1. Formule de Torricelli** pour la vidange d'un récipient,  $v_B = \sqrt{2gh}$ . La formule est valable si l'écoulement est parfait et le régime quasi permanent.

Puisque la section  $s$  du trou est petite par rapport à la section  $S$  du récipient, la conservation du débit (incompressibilité) impose que  $v_A \ll v_B$ . On peut donc négliger le terme en  $v_A^2$  et il reste

$$\rho g z_A = \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z_B \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} \quad (\text{formule de Torricelli}).$$

**2.** La vitesse de l'eau en sortie du récipient est  $v(t) = \sqrt{2gz(t)}$ , où  $z(t)$  est la différence d'altitude entre la surface libre et le trou. L'incompressibilité de l'eau impose par ailleurs que le débit volumique descendant au niveau de la surface libre soit égal au débit sortant par le trou,  $-\frac{dz}{dt} \times S = s \times \sqrt{2gz(t)}$ .

### Attention

### Orientation des débits

Il ne faut pas oublier le signe « moins », dû à l'orientation des débits. On ne commet pas d'erreur de signe si on précise bien les adjectifs « entrant » ou « sortant » pour les débits étudiés.

Cette relation s'intègre en séparant les variables,

$$\frac{dz}{\sqrt{2gz}} = -\frac{s}{S} dt \quad \Rightarrow \quad \int_{z(0)=h}^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{2gz}} = \int_{t=0}^t -\frac{s}{S} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{g}} [\sqrt{z(t)} - \sqrt{h}] = -\frac{s}{S} t.$$

Le temps de vidange est  $T$  tel que  $z(T) = 0$  (la surface libre a rejoint le trou), donc

$$T = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

### 1.10. Forme d'un filet d'eau ★★

La viscosité dynamique de l'eau à température ambiante est  $\eta \simeq 1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Un filet d'eau coule verticalement à l'air libre après avoir quitté un robinet de section horizontale circulaire de rayon  $r_0 \simeq 1 \text{ cm}$ . Le débit volumique  $D = 2 \cdot 10^{-1} \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$  est constant dans le temps (régime permanent). Le filet d'eau possède une symétrie de révolution autour de l'axe vertical (axe du cercle de rayon  $r_0$  à la sortie du robinet). On repère par  $z$  les altitudes sur la verticale ascendante,  $z = 0$  correspondant à la sortie du robinet.

1. L'écoulement en sortie du robinet est-il laminaire ? Peut-on le considérer comme parfait dans le filet d'eau ?
2. Justifier que la pression est la même en tout point du filet d'eau.
3. En coordonnées cylindriques, déterminer l'équation  $z = f(r)$  d'une génératrice de la surface libre du filet d'eau (courbe qui engendre la surface libre par rotation autour de l'axe de révolution).
4. Le filet d'eau, continu sur une certaine distance en dessous du robinet, finit par se scinder en gouttes. Expliquer ce phénomène. Comment le débit du filet d'eau influe-t-il sur le lieu où les gouttes se forment ?

#### ► Corrigé

1. En notant  $U$  la vitesse moyenne de l'écoulement dans le tuyau, et  $\rho$  la masse volumique de l'eau, le nombre de Reynolds s'écrit  $\text{Re} = \frac{\rho U r_0}{\eta}$ . Pour que l'écoulement soit laminaire, sa valeur doit être inférieure (en ordre de grandeur) à la valeur critique  $\text{Re}_c \simeq 10^3$ . La valeur critique  $U_c$  de la vitesse correspondante vérifie donc

$$\text{Re} = \frac{\rho U r_0}{\eta} < \text{Re}_c = \frac{\rho U_c r_0}{\eta} \Rightarrow U < U_c \simeq \frac{\text{Re}_c \eta}{\rho r_0} \simeq 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le débit critique est  $D_c = U_c \times \pi r_0^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  ou  $D_c = 3 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ . Avec la valeur de l'énoncé,  $D < D_c$ , donc l'écoulement est laminaire en sortie de robinet. Comme il n'y a pas de parois solides autour du filet d'eau, il n'y a pas de cause de cisaillement dans l'écoulement (viscosité sans effet), qui peut alors être considéré comme parfait.

2. Le jet est en chute libre et ne rencontre pas d'obstacle. L'exercice 1.3 page 3 a permis de montrer que, dans ce cas, la pression dans le jet est uniforme et égale à la pression  $P_0$  de l'air ambiant.

3. L'axe de révolution est l'axe (vertical) du disque de rayon  $r_0$ . Le régime étant permanent, la forme du jet ne varie pas dans le temps et le débit massique (donc volumique) est le même à travers toute section.

#### Attention

#### Conservation du débit

L'incompressibilité de l'eau ne suffit pas à conclure que le débit est le même à travers toute section du jet. L'hypothèse de permanence du régime est obligatoire.