

Chapitre 2

TRANSFERT THERMIQUE

2.1. Diffusion thermique dans une barre ★

On étudie le transfert thermique dans une barre homogène de section S , de longueur L , dont la surface latérale est calorifugée. On note \vec{u}_x le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la barre. Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ de la barre sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats aux températures respectives T_1 et T_2 . Le champ de température dans la barre ne dépend que de x et t . On note K la conductivité thermique du matériau, ρ sa masse volumique et c sa capacité thermique massique.

1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ de température $T(x,t)$ dans la barre. Faire apparaître le coefficient de diffusion thermique, noté D .
2. En supposant la barre initialement uniforme en température, estimer la durée typique du régime transitoire (durée avant que le régime permanent ne s'établisse). Commenter le résultat.
3. Lorsque le régime permanent est atteint, déterminer le profil de température $x \mapsto T(x)$ dans la barre et le tracer, en supposant par exemple que $T_1 > T_2$.
4. Définir et exprimer la résistance thermique de la barre en régime permanent.
5. En appliquant le deuxième principe de la thermodynamique à la barre (régime permanent), exprimer $\frac{\delta S_c}{dt}$, la quantité d'entropie créée par unité de temps. Interpréter le résultat.

► Corrigé

1.

Méthode

Recherche des directions pertinentes

Un problème de diffusion thermique nécessite de calculer des flux thermiques à travers des surfaces bien choisies. Il est donc préférable de déterminer le plus tôt possible la direction du vecteur courant thermique.

Le courant thermique obéit à la loi de Fourier $\vec{j}_q = -K \overrightarrow{\text{grad}} T$. Il est dirigé seulement selon \vec{u}_x car T ne dépend spatialement que de x , donc $\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$. Dans la suite, on note $\vec{j}_q = j_q(x,t) \vec{u}_x$.

Attention

Sens du courant thermique

La grandeur $j_q(x,t)$ représente la projection (algébrique) du vecteur \vec{j}_q sur le vecteur unitaire \vec{u}_x . Elle peut être positive ou négative. L'écriture $\vec{j}_q = j_q(x,t) \vec{u}_x$ ne préjuge en rien du *sens* du courant thermique.

Méthode

Choix du système

Le système choisi doit être fermé, pour pouvoir appliquer le premier principe de la thermodynamique (bilan d'énergie interne).

Construire une équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$ nécessite de faire apparaître les grandeurs dx et dt dans les expressions intermédiaires. Cela impose de travailler sur des intervalles $[x, x + dx]$ et $[t, t + dt]$.

- Mathématiquement, dx et dt sont des infiniment petits (grandeurs qui tendent vers zéro en fin de calcul).
- Physiquement, la longueur dx est de taille mésoscopique. Elle est suffisamment grande pour contenir beaucoup d'atomes (la notion de moyenne, et donc de température, a un sens). Elle est suffisamment petite pour considérer T comme uniforme sur $[x, x + dx]$. Cela permet d'appliquer la première loi de Joule $dU = C_v dT$ à la tranche $[x, x + dx]$ considérée.

Le système d'étude choisi est une tranche mésoscopique de la barre comprise entre x et $x + dx$ (voir figure 2.1.1).

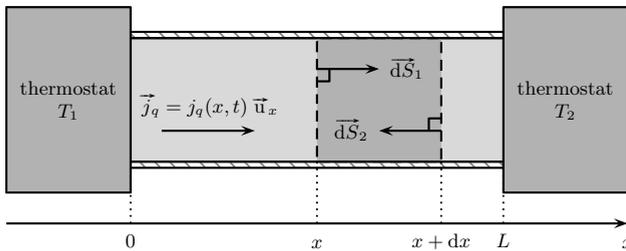


FIG. 2.1.1. Le système mésoscopique étudié est la tranche grisée, comprise entre x et $x + dx$.

La durée d'étude est l'intervalle de temps $[t, t + dt]$. Le référentiel d'étude est celui du laboratoire, dans lequel la barre est immobile. Celle-ci est en contact avec :

- la partie à gauche de x , qui lui fournit $\delta Q_1 = \iint_S \vec{j}_q(x,t) \cdot d\vec{S}_1 dt = j_q(x,t) S dt$;
- la partie à droite de $x + dx$, qui lui fournit

$$\delta Q_2 = \iint_S \vec{j}_q(x,t) \cdot d\vec{S}_2 dt = -j_q(x + dx,t) S dt ;$$

- la paroi latérale, qui ne lui fournit rien (paroi calorifugée).

On applique le premier principe au système, $dU = \delta Q_1 + \delta Q_2$. La masse de la tranche étant $\rho S dx$, sa capacité thermique s'écrit $\delta C_v = \rho S dx c$, où c est la capacité thermique massique du matériau. Dans δC_v , la notation δ est utilisée pour rappeler qu'il s'agit d'une petite quantité (proportionnelle à dx). On transforme le membre de gauche du premier principe à l'aide de la première loi de Joule pour faire apparaître la température,

$$dU = \delta C_v dT = \rho c S dx dT. \quad (2.1.1)$$

Dans cette expression, dU représente la variation d'énergie interne du système entre le début et la fin de l'évolution considérée, c'est-à-dire entre t et $t + dt$. Ainsi, la notation dT représente la variation temporelle de la température (uniforme) de la tranche.

Attention**Cohérence des ordres**

L'expression (2.1.1) montre que dU est proportionnel à dx et dt . C'est donc un infiniment petit d'ordre deux. En effet, l'énergie interne est une grandeur (approximativement) extensive, donc proportionnelle à la masse $\rho S dx$ de la tranche. À un instant donné, on devrait donc la noter $\delta U(t)$ pour signaler sa proportionnalité à dx (infiniment petit d'ordre un). La variation temporelle de l'énergie interne de la tranche est donc $\delta U(t + dt) - \delta U(t)$ et devrait être notée $d(\delta U)$, en accord avec l'ordre deux de la relation (2.1.1).

Le premier principe appliqué au système s'écrit donc

$$\rho S dx c \underbrace{[T(x, t + dt) - T(x, t)]}_{\frac{\partial T}{\partial t} dt} = \underbrace{[j_q(x, t) - j_q(x + dx, t)]}_{-\frac{\partial j_q}{\partial x} dx} S dt. \quad (2.1.2)$$

Méthode**Intervalles courts et approximation uniforme**

En toute rigueur, la température de la tranche n'est pas uniforme. Par une approximation d'ordre zéro, on la considère comme uniforme et on devrait la noter $T(x_c, t)$, où l'abscisse x_c est comprise entre x et $x + dx$. De même, \vec{j}_q dépend *a priori* du temps, donc il faudrait écrire $j_q(x, t_c)$, où t_c est quelque part entre t et $t + dt$. Lorsque dx et dt tendent vers zéro, x_c tend vers x et t_c tend vers t , donc x_c et t_c n'interviennent que de façon intermédiaire. En pratique, on prend rarement la peine de les faire apparaître.

Les développements de Taylor au premier ordre sont donnés sous les accolades dans l'expression (2.1.2).

Méthode**Formule de Taylor**

La formule de Taylor au premier ordre s'écrit

$$T(x, t + dt) = T(x, t) + \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dt + o(dt).$$

Le terme $o(dt)$ s'appelle le reste du développement limité et la notation o signifie qu'il devient négligeable devant dt lorsque dt tend vers zéro.

En physique, on prend rarement la peine d'écrire les restes $o(dx)$ et $o(dt)$ car ils disparaissent lorsque dx et dt tendent vers zéro en fin de calcul.

On peut ensuite simplifier l'équation (2.1.2) par S , dx et dt pour obtenir

$$\rho S \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_q}{\partial x}.$$

Enfin, on remplace j_q par la loi de Fourier, soit ici $j_q = -K \frac{\partial T}{\partial x}$, ce qui donne

$\rho S \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, ou encore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ où } D \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \frac{K}{\rho c} \text{ est le coefficient de diffusion.} \quad (2.1.3)$$

2. On approche les d\u00e9riv\u00e9es par des accroissements finis pour faire des estimations. En notant τ la dur\u00e9e du r\u00e9gime transitoire (dur\u00e9e sur laquelle le front thermique a

avanc\u00e9 de L), l'\u00e9quation de diffusion (2.1.3) donne $\frac{\Delta T}{\tau} \sim D \frac{\Delta T}{L^2}$, soit $\tau \sim \frac{L^2}{D}$. Si

on double la longueur de la barre, il faut quatre fois plus de temps pour que le r\u00e9gime s'\u00e9tablisse. En cuisine, si on double l'\u00e9paisseur d'un morceau de viande, il faut le cuire quatre fois plus longtemps. Plus le coefficient de diffusion est grand, plus le r\u00e9gime transitoire est bref.

3. Par d\u00e9finition du r\u00e9gime permanent, les d\u00e9riv\u00e9es partielles temporelles sont nulles. L'\u00e9quation de diffusion (2.1.3) devient $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ et s'int\u00e9gre en $T = ax + b$, o\u00f9 a et b sont deux constantes d'int\u00e9gration. On utilise les conditions aux limites impos\u00e9es par le contact thermique parfait, $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$, ce qui donne

$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$. Le profil de temp\u00e9rature est lin\u00e9aire dans la barre en r\u00e9gime permanent (voir figure 2.1.2).

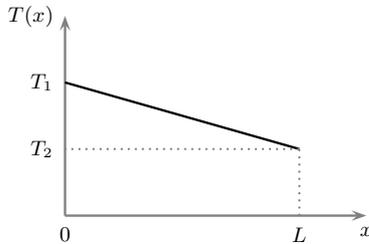


FIG. 2.1.2. Profil lin\u00e9aire de temp\u00e9rature dans la barre en r\u00e9gime permanent.

4. On calcule le flux thermique \u00e0 travers une section transversale de la barre orient\u00e9e vers les x croissants,

$$\phi(x) = \iint_S \vec{j}_q(x) \cdot \vec{dS} = j_q(x) \times S = -K S \frac{dT}{dx}(x).$$

L'expression du champ de temp\u00e9rature en r\u00e9gime permanent donne la d\u00e9riv\u00e9e spatiale de la temp\u00e9rature, $\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$, d'o\u00f9 $\phi(x) = \frac{KS}{L}(T_1 - T_2)$. On constate que le flux thermique calcul\u00e9 ne d\u00e9pend pas de x , ce qui est coh\u00e9rent avec le r\u00e9gime permanent. Entre deux sections fixes x_1 et x_2 , la quantit\u00e9 d'\u00e9nergie interne ne doit pas d\u00e9pendre du temps, donc le flux entrant par la section x_1 doit \u00eatre \u00e9gal au flux sortant par la section x_2 .

On d\u00e9finit la r\u00e9sistance thermique $R_{th} \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \frac{L}{KS}$ afin de poser $\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ par ana-

logie avec la loi d'Ohm \u00e9lectrocin\u00e9tique $i = \frac{V_1 - V_2}{R}$. Cette notion, valable seulement en r\u00e9gime permanent, est tr\u00e8s utile pour les associations de r\u00e9sistances thermiques en s\u00e9rie ou en parall\u00e8le (voir exercice 2.2 page 39, par exemple).

5. Le deuxi\u00eame principe appliqu\u00e9 \u00e0 la barre entre deux instants t et $t + dt$ s'\u00e9crit $dS = \delta S_e + \delta S_c$.

► La valeur δS_e est la quantité d'entropie fournie à la barre par les deux thermostats. En notant δQ_1 et δQ_2 les quantités d'énergie thermique fournies par les thermostats, à la barre, $\delta S_e = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2}$. Or, $\delta Q_1 = +\phi dt$ et $\delta Q_2 = -\phi dt$, donc

$$\delta S_e = \frac{\phi dt}{T_1} + \frac{-\phi dt}{T_2}.$$

► La valeur δS_c est la quantité d'entropie créée dans la barre.

En régime permanent, l'entropie S de la barre est constante, donc $dS = 0$. Le deuxième principe appliqué à la barre s'écrit donc

$$0 = \frac{\phi dt}{T_1} - \frac{\phi dt}{T_2} + \delta S_c \Rightarrow \frac{\delta S_c}{dt} = \underbrace{\frac{T_1 - T_2}{R_{th}}}_{>0} \left(\underbrace{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}_{>0} \right).$$

L'inégalité $\frac{\delta S_c}{dt} > 0$ montre qu'il y a création d'entropie au cours du temps, ce qui est en accord avec l'aspect irréversible de la diffusion thermique.

Rappel

Irréversibilité et critère du film à l'envers

Le transfert thermique s'effectue spontanément du chaud vers le froid. Si on filme une expérience de diffusion et que l'on projette le film à l'envers, le flux thermique va du froid vers le chaud, ce qui est absurde et met en évidence l'irréversibilité du phénomène de diffusion.

Celle-ci se voit également par le fait que l'équation de diffusion $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ n'est pas invariante par renversement du temps $t \mapsto -t$: elle est modifiée en $-\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

2.2. Double vitrage ★

Le but est de comparer les efficacités isolantes d'un simple et d'un double vitrage. On considère une surface vitrée d'aire S séparant l'intérieur d'une pièce à la température T_i de l'extérieur à la température T_e . On suppose le problème unidimensionnel : le profil de température ne dépend que de x , (Ox) étant un axe perpendiculaire à la fenêtre. On donne les conductivités thermiques du verre ($\kappa_v = 1,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) et de l'air ($\kappa_a = 0,024 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Les échanges thermiques à une interface air-verre sont pris en compte par une loi de transfert convecto-diffusif (loi de Newton) de la forme $\vec{j}_q = h(T_1 - T_2) \vec{n}_{12}$, où T_1 et T_2 désignent les températures de part et d'autre de l'interface, \vec{n}_{12} est le vecteur unitaire orienté de 1 vers 2, normal à l'interface, et où \vec{j}_q est le vecteur densité courant thermique. Le constructeur donne les valeurs suivantes pour le coefficient de transfert thermique h :

- $h = h_i = 9,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ pour un contact entre le verre et l'air d'un local fermé ;
- $h = h_e = 16,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ pour un contact entre le verre et l'air extérieur.

Seuls les régimes permanents sont considérés dans ce problème.

1. Montrer que la loi de transfert convecto-diffusif, exprimée pour une interface d'aire S , peut être mise sous la forme d'une résistance thermique R à exprimer en fonction de h et S . Expliquer brièvement la signification de h et pourquoi $h_i < h_e$.
2. En déduire la résistance thermique d'un vitrage simple, constitué d'une vitre d'épaisseur $e = 4,0$ mm et d'aire $S = 1,0$ m². Comparer avec la valeur donnée par le constructeur : $0,17$ K · W⁻¹. Conclure.
3. Donner l'expression de la résistance thermique d'un double vitrage constitué de deux vitres parallèles d'épaisseur $e = 4,0$ mm, séparées par une couche d'air d'épaisseur $e' = 6,0$ mm. Calculer numériquement cette résistance pour $S = 1,0$ m². Comparer avec la valeur donnée par le constructeur : $0,28$ K · W⁻¹. Conclure et proposer une explication.

► Corrigé

1. On considère une interface d'aire S séparant du verre (milieu 1) de température T_1 et de l'air (milieu 2) de température T_2 . Le flux thermique ϕ passant de 1 vers 2 s'écrit, d'après la loi de Newton,

$$\phi = \iint_S \vec{j}_q \cdot d\vec{S} \Rightarrow \phi = \iint_S h(T_1 - T_2) \vec{n}_{12} \cdot dS \vec{n}_{12} = hS(T_1 - T_2).$$

Le régime étant permanent, on peut définir une résistance thermique R de l'interface par analogie avec l'électrocinétique, $\phi = \frac{T_1 - T_2}{R}$. En identifiant les deux expressions,

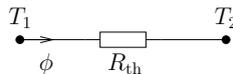
la résistance thermique de l'interface est $R = \frac{1}{hS}$. Le coefficient h est lié aux mouvements de l'air : plus la couche limite de l'air à l'interface air-verre est fine, plus h est grand. Donc h croît avec l'intensité des mouvements de l'air : plus ces mouvements sont importants, plus les échanges thermiques sont favorisés. Ainsi, $h_i < h_e$ car les mouvements à l'intérieur d'une pièce sont plus faibles que les mouvements à l'extérieur. D'ailleurs, la valeur de h_e donnée par l'énoncé ne peut être qu'une valeur moyenne. En cas de vent fort, h_e augmente.

2. Une vitre simple est une couche de verre avec deux interfaces : l'une avec l'air intérieur (h_i) et l'autre avec l'air extérieur (h_e). Elle va donc avoir le comportement thermique de trois résistances thermiques en série (l'épaisseur e de verre et les deux couches limites).

Rappel

Association de résistances thermiques

La notion de résistance thermique a un sens en régime permanent (voir exercice 2.1 page 35). Elle est définie par analogie avec l'électrocinétique, $\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$.



Les lois d'association des résistances thermiques sont analogues à celles des résistances électriques.

La résistance thermique R_v de la couche de verre se trouve par analogie avec l'électrocinétique, $R_v = \frac{e}{\kappa S}$. La résistance thermique d'un vitrage simple est donc

$$R_{\text{simple}} = \frac{1}{h_i S} + \frac{e}{\kappa_v S} + \frac{1}{h_e S} \simeq 0,17 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

L'accord avec la valeur donnée par le constructeur est bon.

3. Le raisonnement est *a priori* le même pour le double vitrage. Pour tous les contacts air-verre sauf celui avec l'air extérieur, on utilise le coefficient h_i . En exprimant la résistance de la couche d'air $R_a = \frac{e'}{\kappa_a S}$ et en additionnant ces sept résistances en série comme précédemment, on obtient

$$R_{\text{double}} = \frac{3}{h_i S} + \frac{e'}{\kappa_a S} + \frac{2e}{\kappa_v S} + \frac{1}{h_e S} \simeq 0,64 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Or, la valeur donnée par le constructeur est $0,28 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. L'écart est supérieur à 100 %. Il y a donc un problème dans l'expression de la résistance thermique. En effet, on a utilisé $R_a = \frac{e'}{\kappa_a S}$, ce qui revient à faire comme si l'air avait un comportement de solide (rigoureusement immobile) entre les deux vitres. Par ailleurs, on a considéré que, pour les interfaces entre les deux vitres et la couche d'air intermédiaire, les coefficients de la loi de Newton étaient h_i . Il y a donc une incohérence : d'une part, l'air a un comportement thermique de solide et, d'autre part, on utilise des coefficients h_i typiques de mouvements de convection. Il y a sans doute des mouvements de convection dans l'air de la couche intermédiaire car la vitre interne et la vitre externe ne sont pas à la même température : l'air devient moins dense en se réchauffant près de la paroi la plus chaude et a tendance à monter. Ainsi, si l'air est brassé par convection, il n'a pas du tout un comportement thermique de solide. Au contraire, il passe son temps à transporter de l'énergie thermique de la vitre chaude vers la vitre froide de façon beaucoup plus efficace que par simple diffusion. On pourrait donc retoucher le modèle en donnant à la couche d'air intermédiaire une résistance thermique nulle ($R_a = 0$) tout en gardant les deux termes $\frac{1}{h_i S}$ correspondant aux couches limites droite et gauche. La résistance thermique devient alors $R_{\text{double}} = \frac{3}{h_i S} + \frac{2e}{\kappa_v S} + \frac{1}{h_e S} \simeq 0,39 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Cette valeur surestime encore la résistance thermique. Il ne faut pas oublier que l'espace entre les deux vitres est étroit (quelques millimètres). Les mouvements de convection y sont donc lents. Il serait plus raisonnable de voir la couche d'air entre les deux vitres comme une seule grosse couche limite, à laquelle il convient d'affecter la résistance thermique $R = \frac{1}{h_i S}$. Dans ce cas,

$$R_{\text{double}} = \frac{2}{h_i S} + \frac{2e}{\kappa_v S} + \frac{1}{h_e S} \simeq 0,28 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

L'accord avec la donnée du constructeur est satisfaisant dans ce modèle. Le rapport entre les résistances thermiques du double vitrage et du simple vitrage est $\frac{0,28}{0,17} \simeq 1,64$. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le double vitrage ne double pas la résistance thermique.

2.3. Température du corps humain en plongée ★

Le but est de décrire les processus de transfert thermique entre le corps d'un plongeur sous-marin et l'eau. On note $T_{\text{int}}(t)$ la température interne du plongeur à l'instant t , supposée uniforme, et T_{ext} la température de l'eau.

► L'ensemble {périphérie du corps humain + derme} est assimilé à une résistance thermique notée R_1 .

► Le plongeur est équipé d'une combinaison en néoprène d'épaisseur $e = 5$ mm. Le contact thermique entre la peau du plongeur et l'intérieur de la combinaison est supposé parfait. Le néoprène est une mousse remplie de bulles de diazote. Une fois la combinaison gorgée d'eau, sa conductivité thermique est $K \simeq 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On note R_{comb} la résistance thermique associée.

► Les transferts thermiques entre la paroi externe de la combinaison et l'eau sont modélisés par la loi de Newton donnant le courant thermique conducto-convectif sortant,

$$\vec{j}_{q_{\text{cc}}} = h(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}) \vec{n}_{\text{sortant}},$$

où \vec{n}_{sortant} est la normale unitaire sortante et $h \simeq 2 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ un paramètre phénoménologique. On note R_{cc} la résistance thermique associée à ce transport.

► Les transferts radiatifs (rayonnement de type infrarouge) de la paroi vers l'extérieur sont modélisés par la loi de Stefan (admise) donnant le flux radiatif global,

$$\Phi_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma S (T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{ext}}^4),$$

où S est l'aire de l'interface, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ SI}$ est la constante de Stefan et $\varepsilon \in [0,1]$ le pouvoir d'émissivité traduisant l'efficacité des processus radiatifs.

1. Montrer que, si l'écart entre T_{paroi} et T_{ext} est faible, Φ_{rad} est approximativement proportionnel à $(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})$. Déterminer la constante de proportionnalité. (Indication : poser $\alpha = T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}$ et utiliser le fait que α est petit devant les températures mises en jeu pour faire un développement limité.) Définir et donner l'expression de R_{rad} , résistance thermique associée au transport radiatif.

2. Exprimer R_{cc} en fonction de h et S .

3. Proposer le schéma électrique équivalent permettant de déterminer la résistance thermique totale R_{tot} entre l'intérieur du corps humain et l'eau. En déduire l'expression du flux thermique global Φ_{th} en fonction de $T_{\text{int}}(t)$, T_{ext} et R_{tot} .

4. On cherche à simplifier l'expression de R_{tot} .

► Montrer que le processus de transfert radiatif est négligeable dans le schéma précédent (il sera négligé dans la suite).

► Estimer la valeur de R_{comb} et montrer que R_{cc} peut être négligée.

5. Le corps humain dégage de l'énergie thermique grâce aux molécules d'ATP. On note \mathcal{P}_{ATP} la puissance associée à cette production interne, C la capacité thermique massique du corps humain, et M la masse du plongeur.

5.a. Établir une équation différentielle permettant de déterminer la température T_{int} du plongeur en fonction du temps.

5.b. En supposant \mathcal{P}_{ATP} constante dans le temps, déterminer l'expression de la température $T_{\text{int}}(t)$ en fonction de R_{tot} , T_{ext} , \mathcal{P}_{ATP} , C , M et $T_{\text{int}}(0)$.

5.c. L'état d'hypothermie est atteint lorsque la température du plongeur passe en dessous de $T_{\text{int}} = 35^\circ\text{C}$. Sachant que $T_{\text{ext}} = 15^\circ\text{C}$, $\mathcal{P}_{\text{ATP}} \simeq 1,5 \cdot 10^2 \text{ W}$, $T_{\text{int}}(0) = 37^\circ\text{C}$, $C \simeq 4 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $M \simeq 70 \text{ kg}$ et $R_1 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, déterminer le temps t_h au bout duquel l'hypothermie est atteinte. Commenter le résultat et le modèle.

► **Corrigé**

1. Conformément à l'indication de l'énoncé, on pose $T_{\text{paroi}} = T_{\text{ext}} + \alpha$, donc

$$T_{\text{paroi}}^4 = (T_{\text{ext}} + \alpha)^4 = T_{\text{ext}}^4 \left(1 + \frac{\alpha}{T_{\text{ext}}}\right)^4 \simeq T_{\text{ext}}^4 \left(1 + 4 \frac{\alpha}{T_{\text{ext}}}\right) \text{ car } \frac{\alpha}{T_{\text{ext}}} \ll 1.$$

Ainsi, $T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{ext}}^4 \simeq 4\alpha T_{\text{ext}}^3$ et la loi de Stefan s'écrit approximativement

$$\Phi_{\text{rad}} \simeq 4\varepsilon\sigma T_{\text{ext}}^3 S (T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}). \quad (2.3.1)$$

La proportionnalité à $(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})$ permet de définir la résistance thermique R_{rad} comme $\Phi_{\text{rad}} = \frac{T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{rad}}}$. En identifiant cette définition avec la relation (2.3.1),

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{4\varepsilon\sigma T_{\text{ext}}^3 S}.$$

2. Le flux conducto-convectif à l'interface paroi-eau s'obtient en intégrant la loi de Newton sur toute l'interface.

$$\Phi_{\text{cc}} = \iint_S \vec{j}_{q_{\text{cc}}} \cdot \vec{dS}_{\text{sortant}} = h S (T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})$$

En identifiant avec la définition $\Phi_{\text{cc}} = \frac{T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{cc}}}$ de la résistance thermique,

$$R_{\text{cc}} = \frac{1}{hS}.$$

3. Les résistances de conduction associées au corps humain et à la combinaison sont en série, car traversées par le même flux thermique. Les résistances de convection et de radiation sont en parallèle, car vues entre les mêmes différences de température (on rappelle que la température joue le rôle du potentiel en électrocinétique, voir figure 2.3.1).

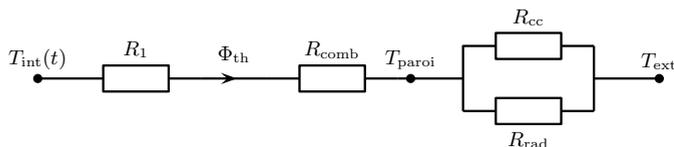


FIG. 2.3.1. Résistances thermiques.

La notion de résistance thermique a un sens uniquement en régime permanent (voir exercice 2.1 page 35). Dans ce cas, il n'y a aucune accumulation d'énergie interne. C'est l'analogue de la non-accumulation de charge en électrocinétique dans l'ARQS, qui conduit à la loi des nœuds et permet d'établir les lois d'association des résistances électriques en série et en parallèle. Ainsi, ces lois sont transposables aux résistances thermiques et la résistance totale s'écrit

$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_{\text{comb}} + \frac{R_{\text{rad}} R_{\text{cc}}}{R_{\text{rad}} + R_{\text{cc}}}.$$

4. On compare les résistances thermiques associées à la conducto-convection et au rayonnement, $\frac{R_{cc}}{R_{rad}} = \frac{4\varepsilon\sigma T_{ext}^3}{h} \simeq 0,03$ en prenant, par exemple, $T_{ext} \simeq 290\text{ K}$ et $\varepsilon = 1$ (cas où le rayonnement est le plus efficace possible). Ainsi, la résistance thermique de conducto-convection ne représente que 3% de la résistance thermique de rayonnement. Le flux conducto-convectif est donc au moins trente fois plus important que le flux radiatif. Dans la suite, on néglige le transfert radiatif devant le transfert conducto-convectif ($R_{rad} \gg R_{cv}$), donc $R_{tot} \simeq R_1 + R_{comb} + R_{cc}$. En estimant l'aire du corps humain à $S \simeq 2\text{ m}^2$, la résistance thermique de la combinaison est $R_{comb} = \frac{e}{KS} \simeq 4,6 \cdot 10^{-2}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. On peut estimer le rapport

$$\frac{R_{comb}}{R_{cc}} = \frac{eh}{K} \simeq 2 \cdot 10^1,$$

ce qui montre que $R_{comb} \gg R_{cc}$ et permet de simplifier la résistance thermique totale selon $R_{tot} \simeq R_1 + R_{comb}$.

5.a. On applique le premier principe de la thermodynamique, entre t et $t + dt$, au corps humain qui constitue un système fermé, $dU = -\Phi_s dt + \mathcal{P}_{ATP} dt$, où :

- ▶ $\Phi_s = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{tot}}$ est le flux thermique sortant du corps ;
- ▶ $\mathcal{P}_{ATP} dt$ est l'énergie apportée grâce aux molécules d'ATP dans le cadre d'un fonctionnement normal du métabolisme.

Méthode

Premier principe et apport « interne » d'énergie

L'écriture proposée du premier principe fait comme si l'énergie $\mathcal{P}_{ATP} dt$ était apportée par l'extérieur. En réalité, il s'agit d'une conversion d'énergie potentielle interne (contenue dans les liaisons chimiques des molécules d'ATP) en énergie d'agitation thermique (forme « visible » d'énergie). Cette approche simplificatrice est systématiquement utilisée dans les exercices. En « externalisant » les phénomènes internes, elle évite d'avoir à considérer les modifications internes de composition du système dues à des réactions chimiques (ou nucléaires pour les exercices prenant en compte la radioactivité).

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{T_{int}(t) - T_{ext}}{R_{tot}} + \mathcal{P}_{ATP}$$

La première loi de Joule appliquée au corps humain s'écrit

$$dU = MC [T_{int}(t + dt) - T_{int}(t)] \Rightarrow MC \frac{dT_{int}}{dt} + \frac{T_{int}(t)}{R_{tot}} = \mathcal{P}_{ATP} + \frac{T_{ext}}{R_{tot}}$$

$$\Rightarrow \frac{dT_{int}}{dt} + \frac{T_{int}}{\tau} = \frac{1}{\tau} (T_{ext} + R_{tot} \mathcal{P}_{ATP}) \quad \text{où } \tau = MC R_{tot}.$$

5.b. La solution de l'équation différentielle est $T_{int}(t) = T_{lim} + A \exp(-t/\tau)$, où A est une constante à déterminer avec la condition initiale $T_{int}(0) = 37^\circ\text{C}$. Ainsi, $A = T_{int}(0) - T_{lim}$ et

$$T_{int}(t) = T_{lim} + (T_{int}(0) - T_{lim}) \exp(-t/\tau).$$

A priori, la température interne du corps décroît en fonction du temps, donc le préfacteur $T_{\text{int}}(0) - T_{\text{lim}}$ de l'exponentielle est positif.

5.c. L'instant t_h pour lequel l'hypothermie est atteinte vérifie $T(t_h) = T_h = 35^\circ\text{C}$, donc $T_h = T_{\text{lim}} + (T_{\text{int}}(0) - T_{\text{lim}}) \exp(-t_h/\tau)$, soit

$$t_h = \tau \ln \frac{T_{\text{int}}(0) - T_{\text{lim}}}{T_h - T_{\text{lim}}} \simeq 1 \cdot 10^4 \text{ s} \simeq 3 \text{ h} .$$

L'ordre de grandeur de cette valeur paraît en accord avec l'expérience. L'application numérique pour un plongeur sans combinaison ($R_{\text{comb}} = 0$) donnerait $T_h \simeq 50 \text{ min}$, ce qui est un bon ordre de grandeur également. Il est difficile d'obtenir des résultats précis, car les valeurs de R_1 et \mathcal{P}_{ATP} proposées par l'énoncé sont variables d'une personne à l'autre (frilosité, métabolisme).

2.4. Transfert thermique dans un cylindre creux ★

On considère un conducteur thermique et électrique, de conductivités respectives λ et γ , délimité par deux cylindres coaxiaux de rayons a et b . Sa longueur est supposée infinie et le régime est permanent. La température de la paroi intérieure est T_1 , celle de la paroi extérieure est T_2 et celle de l'air extérieur est T_e . Un courant électrique de densité volumique \vec{j} uniforme parcourt le conducteur parallèlement à son axe de révolution. On note \vec{j}_q le courant thermique.

1. À l'aide d'un bilan d'énergie sur un élément mésoscopique bien choisi, montrer que $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \times j_q) = \frac{j^2}{\gamma}$.
2. Montrer que $\vec{j}_q = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right) \vec{u}_r$, où α et β sont à expliciter en fonction de j , γ , λ , T_1 , T_2 , a et b .
3. On note h le coefficient de transfert conducto-convectif entre l'air extérieur et la paroi extérieure. La loi de Newton s'écrit $\vec{j}_q = h(T_2 - T_e) \vec{u}_r$. Calculer T_2 en fonction de α , β , h , b et T_e .

► Corrigé

1. Pour déterminer la répartition de $T(r)$ dans le conducteur, on réalise un bilan d'énergie sur un anneau cylindrique de hauteur L , de rayon interne r et de rayon externe $r + dr$. Cela constitue le système mésoscopique sur lequel on travaille pendant dt .

Méthode

Intervalle de travail $[r, r + dr]$

Le choix de l'intervalle $[r, r + dr]$ est nécessaire pour faire apparaître des dérivées par rapport à r dans l'équation différentielle cherchée. Cela délimite un anneau cylindrique de volume

$$d\tau = 2\pi r \, dr \, L .$$

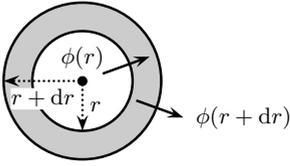


FIG. 2.4.1. Bilan thermique sur un anneau cylindrique élémentaire.

L'application du premier principe de la thermodynamique à ce système conduit à $dU = \delta Q_{\text{ext}} + \delta W_{\text{ext}}$. En régime stationnaire, les fonctions d'état thermodynamiques ne varient pas dans le temps, de sorte que $dU = 0$. Le terme δQ_{ext} représente le transfert thermique reçu par le système de la part de l'extérieur. On le calcule comme $\delta Q_{\text{ext}} = \delta Q_e - \delta Q_s$, où $\delta Q_e = \phi(r) dt$ et $\delta Q_s = \phi(r + dr) dt$ sont les transferts thermiques entrant et sortant de l'anneau en r et $r + dr$, respectivement (voir figure 2.4.1). Les flux thermiques associés, notés $\phi(r)$ et $\phi(r + dr)$, vérifient

$$\phi(r) = j_q(r) 2\pi r L \quad \text{et} \quad \phi(r + dr) = j_q(r + dr) \times 2\pi L \times (r + dr).$$

On en déduit que $\delta Q_{\text{ext}} = 2\pi L [j_q(r) \times r - j_q(r + dr) \times (r + dr)] dt$. Entre les crochets, on reconnaît la différentielle de la fonction $f(r) \stackrel{\text{déf.}}{=} r \times j_q(r)$, donc

$$\delta Q_{\text{ext}} = -2\pi L \frac{df(r)}{dr} dr dt = -\frac{1}{r} \frac{d(r \times j_q(r))}{dr} d\tau dt,$$

où $d\tau \stackrel{\text{déf.}}{=} 2\pi r L dr$ représente le volume de l'anneau cylindrique étudié.

L'expression δW_{ext} représente le travail reçu par l'élément de volume $d\tau$ pendant dt . Le cylindre creux étant parcouru par un courant électrique de densité volumique \vec{j} , le travail électrique (effet Joule) δW_{ext} se calcule comme

$$\delta W_{\text{ext}} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt = \frac{j^2}{\gamma} d\tau dt.$$

On remarque que δW_{ext} et δQ_{ext} sont des infiniment petits d'ordre 2, car ils sont proportionnels à $d\tau dt = 2\pi r L dr dt$. En régime stationnaire, $\delta Q_{\text{ext}} + \delta W_{\text{ext}} = 0$. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la densité de flux,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \times j_q(r)] = \frac{j^2}{\gamma}.$$

2. On garde la dérivée telle quelle (on n'applique surtout pas la formule de dérivation d'un produit). Cela conduit à

$$d[r \times j_q(r)] = \frac{j^2}{\gamma} r dr \quad \Rightarrow \quad r \times j_q(r) = \frac{j^2 r^2}{\gamma} + \beta,$$

où β est une constante d'intégration. On en déduit ainsi que $j_q(r) = \frac{j^2 r}{\gamma} + \frac{\beta}{r}$. Avec

l'écriture de l'énoncé, on identifie $\alpha = \frac{j^2}{2\gamma}$. On détermine β en s'appuyant sur les conditions aux limites du problème, $T(a) = T_1$ et $T(b) = T_2$. Pour les utiliser, il faut déterminer l'équation différentielle sur $T(r)$. On relie pour cela $T(r)$ et $j_q(r)$ via la loi de Fourier,

$$\vec{j}_q(r) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \Rightarrow \quad j_q(r) = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\lambda} \left(\alpha r + \frac{\beta}{r} \right). \quad (2.4.1)$$

Il reste à intégrer cette équation entre a et b , $T_2 - T_1 = -\frac{1}{\lambda} \left[\frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) + \beta \ln \frac{b}{a} \right]$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \left[\lambda (T_1 - T_2) + \frac{\alpha}{2} (a^2 - b^2) \right] \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{j^2}{\gamma}.$$

3. On lie T_e et T_2 en traduisant la continuité du flux thermique au niveau de l'interface définie par le cylindre de rayon b , soit $j_q(b^-) = j_q(b^+)$, où $j_q(b^-)$ est donné par la loi de Fourier (2.4.1) dans le matériau, et où $j_q(b^+)$ est donné par la loi de Newton dans la couche limite autour du cylindre. Cela conduit à

$$\alpha b + \frac{\beta}{b} = h(T_2 - T_e) \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_e + \frac{1}{h} \left(\alpha b + \frac{\beta}{b} \right).$$

2.5. Température dans la Terre ★★

Dans cet exercice, on fait les hypothèses suivantes.

- ▶ La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R_T = 6380$ km et de masse volumique uniforme ρ .
- ▶ La température à l'intérieur de la Terre est une fonction de r (symétrie sphérique) notée $T(r)$. La température à la surface de la Terre est $T_s = 290$ K.
- ▶ Le régime est permanent.
- ▶ La conductivité thermique de la Terre, notée λ , est supposée uniforme.

1. Expliquer qualitativement pourquoi la température de la Terre est une fonction décroissante de r . Dans la modélisation (extrêmement simplifiée) adoptée, on définit deux zones.

- ▶ Du centre de la Terre jusqu'à la lithosphère d'épaisseur $R_T - R_L = 100$ km, soit pour $r \in [0, R_L]$, on suppose qu'il n'y a aucune production d'énergie.
- ▶ Pour l'ensemble de la lithosphère, soit pour $r \in [R_L, R_T]$, on tient compte de la source d'énergie thermique que constitue la radioactivité d'éléments, essentiellement l'uranium.

2. À l'aide d'un bilan d'énergie portant sur un élément mésoscopique bien choisi, montrer que la température satisfait, pour $r \in [0, R_L]$, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0.$$

3. Intégrer cette relation afin d'obtenir l'évolution de la température en fonction de r . Cela fait apparaître deux constantes d'intégration notées A et B . Quelle condition aux limites permet de déterminer facilement la valeur d'une de ces deux constantes? Conclure sur la pertinence du modèle.

La source radioactive apporte, dans la lithosphère, une puissance thermique par unité de masse, $\alpha = 5 \cdot 10^{-10} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$, que l'on supposera constante.

4. En procédant comme à la question 2, établir l'équation différentielle vérifiée par T pour $r \in [R_L, R_T]$.

5. En déduire l'évolution de la température dans la lithosphère en fonction de r , de différents paramètres et de deux constantes d'intégration C et D .

6. Quelles conditions aux limites doit-on appliquer à la lithosphère? En déduire C et D en fonction de T_s , R_L , R_T , ρ , α et λ . Donner l'expression complète de la température en fonction de r dans la lithosphère.

7. Déduire de ce qui précède la température T_c au centre de la Terre et faire l'application numérique avec $\rho = 2,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\lambda = 4,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

8. Déterminer le gradient de température à la surface de la Terre et faire l'application numérique. En déduire la valeur du flux thermique global sortant de la Terre.

► **Corrigé**

1. Le noyau terrestre est le lieu où la température est maximale. D'après la loi de Fourier, le transfert d'énergie \vec{j}_q s'effectue des régions chaudes vers les régions froides, donc du noyau vers l'écorce terrestre.

2. On applique le premier principe de la thermodynamique à une coquille sphérique de rayon interne r et de rayon externe $r + dr$ contenue entre le noyau et la lithosphère (voir figure 2.5.1), $dU = \delta Q + \delta W$.

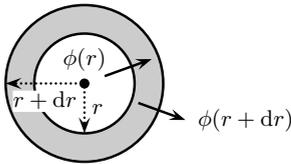


FIG. 2.5.1. Bilan d'énergie sur une coquille sphérique de volume $4\pi r^2 dr$.

Comme le manteau n'est pas déformable, $\delta W = 0$. Par ailleurs, on note $\phi(r) = 4\pi r^2 j_q(r)$ le flux thermique traversant une sphère de rayon r , orientée vers l'extérieur. Le transfert thermique reçu par la coquille sphérique durant dt s'écrit $\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$ avec :

► $\delta Q_e = \phi(r) dt = 4\pi r^2 j_q(r) dt$, le transfert thermique entrant par la sphère intérieure de rayon r ;

► $\delta Q_s = \phi(r + dr) dt = 4\pi (r + dr)^2 j_q(r + dr) dt$, le transfert thermique sortant par la sphère extérieure de rayon $r + dr$.

En régime permanent, $dU = \delta Q_e - \delta Q_s = 0$, donc

$$(r + dr)^2 j_q(r + dr) - r^2 j_q(r) = 0. \quad (2.5.1)$$

En posant $f(r) = r^2 j_q(r)$, l'équation (2.5.1) peut s'écrire

$$f(r + dr) - f(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{df(r)}{dr} dr \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (r^2 j_q(r)) = 0.$$

La loi de Fourier s'écrit $\vec{j}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$, donc $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0$.

Bien que le régime soit stationnaire, qu'il n'y ait pas de sources de production interne et pas d'autres transferts que les transferts conductifs, on constate que la densité de flux thermique conductif j_q dépend de r . C'est une conséquence de la géométrie sphérique. Le flux thermique $\phi(r) = j_q(r) \times 4\pi r^2$ est, quant à lui, indépendant de r , ce qui traduit la non-accumulation d'énergie entre deux sphères de rayons quelconques (régime permanent).

3. Une première intégration de l'équation précédente conduit à $r^2 \frac{dT}{dr} = A$, où A est une constante d'intégration. Une seconde intégration conduit à

$$\forall r \in [0, R_L], T(r) = -\frac{A}{r} + B,$$

où B est une autre constante d'intégration. L'application des conditions aux limites permet la détermination de A et B . La première exigence est que le champ de température $T(r)$ soit défini pour toute valeur de r comprise entre 0 et R_L . En particulier, en $r = 0$, $T(0)$ ne doit pas diverger. Cela impose que $A = 0$, d'où

$$\forall r \in [0, R_L], T(r) = B = \text{cte} . \quad (2.5.2)$$

La température est uniforme dans toute la région qui s'étend du centre du noyau au début de la lithosphère. Un tel modèle n'est pas satisfaisant.

4. On reprend la technique de la question 2. On raisonne sur une coquille sphérique $[r, r + dr]$, avec $r \in [R_L, R_T]$. Les deux termes δQ_e et δQ_s sont toujours présents, mais il faut prendre en compte l'effet de la radioactivité dans le bilan thermique. Tout se passe comme si la coquille recevait, durant dt , un apport supplémentaire d'énergie thermique $\delta Q_{\text{rad}} = \delta m \alpha dt$, où $\delta m = \rho 4\pi r^2 dr$ est la masse de la coquille. (En réalité, cet apport ne vient pas de l'extérieur car les désintégrations radioactives considérées sont internes à la coquille. Voir encadré « Méthode » page 44.) Le bilan énergétique de la question 2 est donc modifié en

$$4\pi r^2 j_q(r) - 4\pi (r + dr)^2 j_q(r + dr) + \rho 4\pi r^2 dr \alpha = 0,$$

soit encore $r^2 j_q(r) - (r + dr)^2 j_q(r + dr) + \rho r^2 dr \alpha = 0$, après simplification par 4π .

Comme précédemment, on peut poser $f(r) \stackrel{\text{déf.}}{=} r^2 j_q(r)$ pour aider à reconnaître une différentielle,

$$f(r) - f(r + dr) + \rho r^2 dr \alpha = 0 \Rightarrow \frac{df}{dr} = \alpha \rho r^2 .$$

Compte tenu de l'expression de la loi de Fourier en coordonnées sphériques, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par la température dans la lithosphère,

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right] = -\frac{\rho \alpha}{\lambda} r^2 .$$

5. Une première intégration donne $r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho \alpha}{3\lambda} r^3 + C$, où C est une constante. Après division par r^2 , une seconde intégration fait apparaître une autre constante D ,

$$\forall r \in [R_L, R_T], T(r) = -\frac{\rho \alpha}{6\lambda} r^2 - \frac{C}{r} + D . \quad (2.5.3)$$

6. En $r = R_L$, la continuité de \vec{j}_q s'écrit $\vec{j}_q(R_L^-) = \vec{j}_q(R_L^+)$. D'après l'équation (2.5.2) et la loi de Fourier, $\vec{j}_q(r) = \vec{0}$, $\forall r \in [0, R_L]$. Ainsi,

$$\vec{j}_q(R_L^+) = \vec{0} \Rightarrow -\lambda \left[\frac{dT(r)}{dr} \right]_{R_L^+} = 0 \stackrel{(2.5.3)}{\Rightarrow} C = \frac{\rho \alpha}{3\lambda} R_L^3 .$$

En R_T , la condition aux limites $T(R_T) = T_s = 290 \text{ K}$ permet d'accéder à D ,

$$T_s = -\frac{\rho\alpha}{6\lambda}R_T^2 - \frac{\rho\alpha}{3\lambda}\frac{R_L^3}{R_T} + D \quad \Rightarrow \quad D = T_s + \frac{\rho\alpha}{6\lambda}R_T^2 + \frac{\rho\alpha}{3\lambda}\frac{R_L^3}{R_T}.$$

Finalement, l'expression du profil de température au sein de la lithosphère est

$$\forall r \in [R_L, R_T], \quad T(r) = T_s - \frac{\rho\alpha}{6\lambda}(r^2 - R_T^2) - \frac{\rho\alpha}{3\lambda}R_L^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T} \right). \quad (2.5.4)$$

7. D'après la relation (2.5.2), $T_c = T(0) = T(R_L^-)$. La continuité de la température en R_L impose que $T(R_L^-) = T(R_L^+)$, dont l'expression peut être calculée à partir de l'équation (2.5.4),

$$T_c = T(0) = T_s + \frac{\rho\alpha}{6\lambda}(R_T^2 - R_L^2) + \frac{\rho\alpha}{3\lambda} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_L} \right) \quad \Rightarrow \quad T_c = 74 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

Cette valeur est largement supérieure à l'ordre de grandeur communément admis dans la communauté scientifique (T_c comprise entre 5 et $6 \cdot 10^3 \text{ K}$). Cela tient à la grande simplicité du modèle présenté ici. En particulier, les phénomènes convectifs dans le noyau liquide de la Terre ne sont pas pris en compte. Or, ils assurent un transport de l'énergie bien plus efficace que la seule conduction.

8. À la surface, $\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R_T} = -\frac{\rho\alpha}{3\lambda}R_T + \frac{C}{R_L^2}$. Compte tenu de l'expression de C ,

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R_T} = \frac{\rho\alpha}{3\lambda R_T^2}(R_L^3 - R_T^3) = -3,4 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Dans les premiers kilomètres en partant du sol, la température augmente d'environ 34 degrés par kilomètre de profondeur, comme le montrent les forages miniers. Le flux thermique global sortant de la Terre est donné par $\phi(R_T) = 4\pi R_T^2 j_q(R_T)$, où $j_q = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R_T}$. Cela donne $\phi(R_T) = 7,0 \cdot 10^{13} \text{ W}$. Cette puissance de 70 TW (téravatts) est énorme. Elle correspond à environ 700 fois la production d'énergie électrique de la France lors des pics de consommation (environ 100 GW). La valeur admise pour $\phi(R_T)$ dans la communauté scientifique est comprise entre 43 et 49 TW. La surestimation de cette valeur vient encore de la simplicité du modèle de l'énoncé.

2.6. Ondes thermiques dans le sol ★

Cet exercice est destiné à comprendre comment les variations périodiques (journalières ou saisonnières) de température à la surface de la terre diffusent dans le sous-sol. Les variations de température au niveau du sol se font autour d'une valeur moyenne T_0 , ont une amplitude θ_0 et une pulsation temporelle ω . La température au sol est alors modélisée par la forme $T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$. Il s'agit de la modélisation la plus simple d'un phénomène périodique : ce sont les deux premiers termes d'une série de Fourier. Le sous-sol est modélisé comme un milieu semi-infini homogène dont le coefficient de diffusion thermique, uniforme, est noté D . En prenant un axe x vertical vers le bas, ayant pour origine la surface, on cherche la température du sous-sol sous la forme $T(x, t) = T_0 + \theta(x, t)$, θ étant à déterminer.

1. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par θ .
2. À la grandeur θ réelle, on associe la grandeur complexe $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$, telle que $\theta = \Re(\underline{\theta})$, où \Re désigne la partie réelle. Donner l'équation différentielle vérifiée par \underline{f} ainsi que sa solution générale.
3. Déterminer les deux constantes d'intégration de la solution à l'aide des conditions aux limites.
4. En revenant en notation réelle, déterminer alors la solution complète au problème de départ. Interpréter physiquement cette solution.
5. Tracer θ en fonction de x pour un instant fixé. Sachant que le coefficient de diffusion est $D \simeq 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, calculer les valeurs pertinentes pour $T = 1$ jour et $T = 1$ an.
6. Calculer à partir de quelle profondeur les variations annuelles de température, dont l'amplitude au sol est $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$, provoquent des variations de température dont l'amplitude est inférieure à 2°C . Donner un exemple d'application des valeurs numériques trouvées.

► **Corrigé**

1. En faisant un bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx du sol entre deux instants t et $t + dt$ très proches, on établit l'équation de diffusion thermique libre $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (voir exercice 2.1 page 35 pour l'établissement de cette équation). En remplaçant T par son expression $T_0 + \theta(x,t)$ dans cette équation, la constante T_0

disparaît et il reste l'équation aux dérivées partielles vérifiée par θ , $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$.

2. Dans cette équation (qui est linéaire), on pose $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$, ce qui donne $j\omega \underline{f}(x) \exp(j\omega t) = D \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} \exp(j\omega t)$. On comprend alors le double intérêt de la forme de solution proposée :

► comme toujours dans les problèmes linéaires, les exponentielles complexes $\exp(j\omega t)$ se simplifient ;

► les dérivées partielles deviennent des dérivées droites car \underline{f} n'est fonction que d'une variable.

On arrive à une équation différentielle ordinaire vérifiée par \underline{f} , ce qui est plus simple à résoudre que l'équation aux dérivées partielles de départ,

$$\frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} - \frac{j\omega}{D} \underline{f}(x) = 0 .$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients (complexes) constants.

1. Une solution de la forme $f(x) \times g(t)$ est dite à variables séparées. La séparation de variables fonctionne bien dans les équations faisant intervenir un laplacien.

Méthode**Équation différentielle linéaire homogène**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène (*i.e.* sans second membre) à coefficients (réels ou complexes) constants, on applique la méthode suivante en respectant scrupuleusement l'ordre indiqué.

1. On cherche les solutions sous la forme $A \exp(rx)$, où x est la variable et où r est à déterminer.
2. En injectant cette forme dans l'équation différentielle, on obtient un polynôme en r appelé polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle.
3. Les racines (réelles ou complexes) de ce polynôme sont les r convenables. On les note r_1, r_2 , etc.
4. Par linéarité de l'équation différentielle, toute combinaison linéaire de solutions est encore solution (théorème de superposition). Ainsi, la solution générale est de la forme

$$f(x) = A_1 \exp(r_1 x) + A_2 \exp(r_2 x) + \dots$$

où les coefficients A_1, A_2 , etc. peuvent être complexes.

5. On détermine les coefficients A_1, A_2 , etc. en utilisant les conditions aux limites.

On cherche ses solutions sous la forme $A \exp(rx)$, ce qui conduit au polynôme caractéristique $r^2 - \frac{j\omega}{D} = 0 \iff r^2 = \frac{j\omega}{D}$. Les racines r de cette équation sont donc les racines carrées complexes du nombre complexe $\frac{j\omega}{D}$.

Méthode**Racines carrées d'un nombre complexe**

Pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe z , le plus pratique est de mettre celui-ci sous la forme exponentielle complexe.

1. On écrit ce nombre sous la forme $z = |z| \exp[j(\theta + 2k\pi)]$, où $\theta = \arg(z)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
2. Extraire ses racines carrées, notées w , revient à élever cette écriture à la puissance $1/2$, soit $w = |z|^{1/2} \exp(j\theta/2) \exp(jk\pi)$. Comme $\exp(jk\pi) = \pm 1$, il y a deux valeurs possibles (opposées) pour w .

En résumé, tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées, $w_{\pm} = \pm |z|^{1/2} \exp(j\theta/2)$.

On écrit $\frac{j\omega}{D}$ sous forme exponentielle, $r^2 = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) \frac{\omega}{D}$, puis on l'élève à la puissance $1/2$ pour obtenir $r = \pm \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\omega}{D}}$. Enfin, on revient à la notation complexe « $a + jb$ » en transformant l'exponentielle complexe, $r = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$. Le coefficient de diffusion thermique D étant en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, et ω en s^{-1} , $\sqrt{\frac{\omega}{D}}$ est homogène à une longueur. On pose donc $L = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$, ce qui permet d'écrire $r = \pm \frac{1+j}{L}$ pour la suite.