OPENBOOK

Mathématiques

en économie-gestion

Stéphane Rossignol

DUNOD

Les contenus complémentaires et les corrigés des exercices sont disponibles en ligne sur www.dunod.com/EAN/9782100780242 ou accessibles en flashant le QR code.

RESSOURCES NUMÉRIQUES

Conseiller éditorial : Lionel Ragot

Création graphique de la maquette intérieure : SG Créations
Création graphique de la couverture : Valérie Goussot et Delphine d'Inguimbert
Crédit iconographique couverture : © August_0802 – www.shutterstock.com

Illustrations : Élisabeth Rossignol

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, 2015, 2018

11 rue, Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-078024-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Sommaire

Avant-propos IV

Chapitre 1 **Fonctions d'une variable réelle : les bases** X

Chapitre 2 **Dérivées** 32

Chapitre 3 **Suites numériques** 56

Chapitre 4 **Limites et continuité** 82

Chapitre 5 **Fonctions puissance, logarithme et exponentielle** 112

Chapitre 6 **Étude locale et globale des fonctions d'une variable réelle** 134

Chapitre 7 **Intégrales** 162

Chapitre 8 **Introduction à l'algèbre linéaire** 186

Chapitre 9 **Matrices, déterminants et systèmes d'équations linéaires** . 214

Chapitre 10 **Diagonalisation, matrices symétriques et applications** 266

Chapitre 11 **Introduction aux fonctions de plusieurs variables** 294

Chapitre 12 **Optimisation de fonctions de plusieurs variables** 330

CORRIGÉS 364

Bibliographie 371

Index 372

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Avant-propos

Pourquoi faut-il étudier les mathématiques en licence d'économie-gestion et en bachelor ? Les nouveaux bacheliers sont souvent surpris de devoir étudier autant les mathématiques en licence d'économie-gestion et en bachelor. Toutefois ils doivent se rendre compte rapidement que celles-ci sont très utiles car :

– les données économiques sont très souvent quantitatives ;

– pour raisonner rigoureusement, la formalisation mathématique et la modélisation sont souvent nécessaires.

En physique comme en économie, la modélisation consiste à représenter de façon simplifiée la réalité pour pouvoir en analyser précisément et rigoureusement un aspect. On traduit en termes mathématiques les hypothèses que l'on fait sur les questions économiques étudiées, puis on en tire logiquement et mathématiquement les conséquences, qu'on retraduit ensuite en termes économiques. Dans ses *Principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838), Cournot est un précurseur de la modélisation mathématique en économie. Celle-ci sera de plus en plus développée à partir de la révolution marginaliste (1870).

Remarquons que les variables économiques dépendent les unes des autres, c'est pourquoi il est particulièrement utile de connaître la théorie mathématique des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. Les agents économiques ont un comportement d'optimisation : la firme cherche à maximiser son profit, le consommateur veut maximiser son bien-être ou son utilité, etc. Ceci rend nécessaire l'étude de l'optimisation mathématique, c'est-à-dire la recherche des maxima et des minima des fonctions d'une ou plusieurs variables.

Que trouve-t-on dans ce manuel ? Le manuel commence par sept chapitres consacrés à l'analyse des fonctions d'une variable. Les trois chapitres suivants exposent les bases de l'algèbre linéaire. Les deux derniers chapitres sont dévolus aux fonctions de plusieurs variables (non linéaires).

Plus précisément, le premier chapitre donne les bases des fonctions d'une variable réelle. Le deuxième est consacré à la dérivation. Le troisième donne une introduction aux suites numériques, utiles particulièrement quand on étudie l'évolution dans le temps d'une variable économique. Le quatrième traite des limites et de la continuité des fonctions d'une variable réelle. Bien que, dans les manuels, les limites sont généralement exposées en détail avant d'aborder la dérivation, nous avons préféré l'ordre inverse, pour des raisons pédagogiques. Nous avons seulement introduit la notion de limite finie en un point au chapitre 2, c'est-à-dire juste ce qui est nécessaire pour comprendre la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement. Cet ordre est celui des programmes de mathématiques au lycée.

Le chapitre 5 présente en détail les fonctions puissances, logarithmes et exponentielles, qui permettent de modéliser une croissance (ou décroissance) régulière. Le sixième chapitre donne l'essentiel de ce qu'il faut connaître pour l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point, et l'étude globale sur tout un intervalle, en particulier pour la recherche des extrema. Le septième chapitre donne les rudiments de calcul intégral.

Les chapitres 8, 9 et 10 exposent l'essentiel de l'algèbre linéaire. Après un exemple introductif, on explique ce qu'est un espace vectoriel, une application linéaire, une matrice, un déterminant. On apprend comment résoudre un système d'équations linéaires et comment diagonaliser une matrice.

Le onzième chapitre est une introduction aux fonctions de plusieurs variables. Enfin le dernier chapitre est consacré à l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, si importante en économie.

Ce livre ne traite que des mathématiques nécessaires pour la licence d'économie-gestion et le bachelor :

– nous avons écarté les thèmes mathématiques utiles aux économistes et aux gestionnaires, mais d'un niveau trop avancé, comme l'optimisation dynamique, le contrôle optimal, la programmation linéaire, etc. ;
– nous avons aussi omis les questions mathématiques qui sont abordées couramment en licence de sciences, mais qui sont moins immédiatement utiles en économie et en gestion : fonctions trigonométriques, nombres complexes, équations différentielles, etc. ;
– nous ne traitons pas non plus des probabilités et des statistiques car celles-ci font l'objet d'un autre manuel dans la même collection.

Quelles sont les spécificités de ce manuel ? Chaque chapitre commence par une introduction qui explique de la façon la plus simple possible l'intérêt et l'idée générale des notions vues dans le chapitre. Comme pour tous les ouvrages de la collection « Openbook », chaque chapitre commence par une rubrique « Objectifs » et finit par « Les points clés », pour clarifier toujours davantage le travail et les enjeux. La rubrique « Les grands auteurs » présente un mathématicien important.

La plupart des théorèmes et propositions sont démontrés. Rappelons qu'en mathématique, proposition et théorème sont synonymes : dans les deux cas, il s'agit d'assertions que l'on démontre rigoureusement. Les démonstrations les plus longues sont disponibles sur le site www.dunod.com.

On s'est efforcé de donner de nombreux exemples, et également de nombreuses applications économiques détaillées et concrètes, pour comprendre l'utilité des notions mathématiques étudiées.

Plusieurs exercices figurent à la fin de chaque chapitre. Certains sont corrigés en fin d'ouvrage ; on trouvera la correction des autres sur le site www.dunod.com.

Remerciements. Je tiens à remercier chaleureusement pour leurs relectures et leurs commentaires : Meglena Jeleva, Raphaël Giraud et Chimène Fischler, ainsi que Morgane Tanvé, Antoine Auberger et François Lassner. Merci également à Lionel Ragot et aux éditions Dunod pour leur proposition de rédiger ce manuel. Bien entendu, je reste seul responsable des erreurs et insuffisances de ce livre. Enfin, je remercie Élisabeth pour ses illustrations.

À Gabriel.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Table des matières

Avant-propos IV

Chapitre 1 **Fonctions d'une variable réelle : les bases** X

LES GRANDS AUTEURS **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)** X

1 Rappels sur les ensembles 2

2 Fonctions 9

3 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 13

4 Raisonnement par récurrence 17

5 Fonctions linéaires, fonctions affines 19

6 Fonctions usuelles 21

Les points **clés** 29

Évaluation 30

Chapitre 2 **Dérivées** 32

LES GRANDS AUTEURS **Isaac Newton (1643-1727)** 32

1 Dérivée d'une fonction en un point 34

2 Fonction dérivée et applications 38

3 Limite finie d'une fonction en un point 41

4 Calculs de dérivées 43

5 Dérivées d'ordre supérieur 48

6 Étude des variations d'une fonction 49

Les points **clés** 53

Évaluation 54

Chapitre 3 **Suites numériques** 56

LES GRANDS AUTEURS **Archimède (287-212 av. J.-C.)** 56

1 Introduction aux suites de nombres réels 58

2 Convergence 61

3 Théorèmes de convergence 65

4 Séries 69

5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 . . . 73
Les points clés . . . 78
Évaluation . . . 79

Chapitre 4 Limites et continuité . . . 82
LES GRANDS AUTEURS Augustin Louis Cauchy (1789-1857) . . . 82
1 Limite en un point x_0 . . . 84
2 Limite en $\pm\infty$ . . . 95
3 Fonction continue en un point . . . 100
4 Continuité à gauche, continuité à droite . . . 104
5 Fonction continue sur un intervalle . . . 105
Les points clés . . . 110
Évaluation . . . 111

Chapitre 5 Fonctions puissance, logarithme et exponentielle . . . 112
LES GRANDS AUTEURS John Napier (1550-1617) . . . 112
1 Fonction puissance rationnelle . . . 114
2 Fonction logarithme . . . 119
3 Fonction exponentielle . . . 125
4 Fonction puissance réelle . . . 131
Les points clés . . . 132
Évaluation . . . 133

Chapitre 6 Étude locale et globale des fonctions d'une variable réelle 134
LES GRANDS AUTEURS Brahmagupta (598-668) . . . 134
1 Accroissements finis . . . 136
2 Formules de Taylor . . . 138
3 Développements limités . . . 141
4 Étude d'une fonction d'une variable et tracé de son graphe . . . 146
5 Fonctions concaves et convexes . . . 151
6 Recherche des extrema d'une fonction d'une variable . . . 154
Les points clés . . . 160
Évaluation . . . 161

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Chapitre 7 **Intégrales** . . . 162
LES GRANDS AUTEURS **Bernhard Riemann (1826-1866)** . . . 162
1 Qu'est-ce qu'une intégrale ? . . . 164
2 Propriétés des intégrales . . . 168
3 Primitives . . . 171
4 Calcul intégral . . . 173
5 Intégrales généralisées (ou impropres) . . . 178
Les points **clés** . . . 184
Évaluation . . . 185

Chapitre 8 **Introduction à l'algèbre linéaire** . . . 186
LES GRANDS AUTEURS **Évariste Galois (1811-1832)** . . . 186
1 Les modèles linéaires : un exemple introductif . . . 188
2 Espaces vectoriels . . . 193
3 Applications linéaires . . . 203
Les points **clés** . . . 211
Évaluation . . . 212

Chapitre 9 **Matrices, déterminants et systèmes d'équations linéaires** . . . 214
LES GRANDS AUTEURS **Al-Khwarizmi (780-850)** . . . 214
1 Matrices . . . 216
2 Déterminant d'une famille de vecteurs . . . 231
3 Déterminant d'une matrice carrée . . . 240
4 Déterminant d'un endomorphisme . . . 249
5 Systèmes d'équations linéaires . . . 250
6 La méthode du pivot de Gauss . . . 258
Les points **clés** . . . 263
Évaluation . . . 264

Chapitre 10 **Diagonalisation, matrices symétriques et applications** . . . 266
LES GRANDS AUTEURS **Carl Friedrich Gauss (1777-1855)** . . . 266
1 Diagonalisation . . . 268
2 Application aux systèmes dynamiques récurrents . . . 275

3 Espace euclidien $\mathbb{R}^n$ . . . 280
4 Matrices symétriques . . . 285
5 Formes quadratiques . . . 286
Les points clés . . . 291
Évaluation . . . 292

Chapitre 11 Introduction aux fonctions de plusieurs variables . . . 294
LES GRANDS AUTEURS Leonhard Euler (1707-1783) . . . 294
1 Distance, ouverts, fermés dans $\mathbb{R}^n$ . . . 296
2 Fonctions continues à plusieurs variables . . . 304
3 Dérivées partielles . . . 309
4 Différentiabilité . . . 313
5 Fonctions homogènes . . . 322
6 Théorème des fonctions implicites . . . 324
Les points clés . . . 327
Évaluation . . . 328

Chapitre 12 Optimisation de fonctions de plusieurs variables . . . 330
LES GRANDS AUTEURS Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) . . . 330
1 Extremum d'une fonction de plusieurs variables . . . 332
2 Extremum d'une fonction convexe, concave . . . 340
3 Optimisation avec une contrainte sous forme d'égalité . . . 342
4 Optimisation avec une contrainte sous forme d'inégalité . . . 349
5 Optimisation avec plusieurs contraintes sous forme d'égalités . . . 352
6 Optimisation avec contraintes sous forme d'inégalités et d'égalités . . . 356
7 Conditions suffisantes d'optimalité globale . . . 359
Les points clés . . . 361
Évaluation . . . 362

CORRIGÉS . . . 364

Bibliographie . . . 371

Index . . . 372

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.