OPENBOOK

Mathématiques

en économie-gestion

Stéphane Rossignol

DUNOD

Les contenus complémentaires et les corrigés des exercices sont disponibles en ligne sur www.dunod.com/EAN/9782100780242 ou accessibles en flashant le QR code.

RESSOURCES NUMÉRIQUES

Conseiller éditorial : Lionel Ragot

Création graphique de la maquette intérieure : SG Créations
Création graphique de la couverture : Valérie Goussot et Delphine d'Inguimbert
Crédit iconographique couverture : © August_0802 – www.shutterstock.com

Illustrations : Élisabeth Rossignol

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, 2015, 2018

11 rue, Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-078024-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Chapitre 1

Les variables économiques dépendent les unes des autres : le taux de chômage dépend du taux de croissance de l'économie (et de bien d'autres facteurs), le profit des entreprises dépend du niveau de la consommation, etc. C'est pourquoi les économistes ont besoin de savoir analyser des variables quantitatives et la façon dont elles dépendent les unes des autres. Cela nécessite de connaître l'analyse mathématique des fonctions et de leurs propriétés.

Les fonctions les plus simples sont les fonctions d'une seule variable réelle. Nous commençons leur étude dans ce chapitre. Comme toutes les mathématiques modernes sont fondées sur la théorie des ensembles, il est utile de débuter par un rappel sur ce sujet. Enfin, nous abordons ici les raisonnements par récurrence. Ils peuvent être nécessaires quand on veut montrer qu'une propriété qui dépend d'un entier n est vraie pour toute valeur de cet entier.

LES GRANDS AUTEURS

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

G.W. Leibniz était un esprit universel. Docteur en droit, il s'intéressa à toutes sortes de disciplines : physique, logique, philosophie, mathématiques. Il disait en effet : « Je ne méprise presque rien. »

En physique, il inventa le concept d'énergie cinétique, sous le nom de « force vive ».

En logique, il voulait créer une langue universelle qui serait entièrement logique.

Son système philosophique original cherchait à dépasser tout dualisme et à montrer l'harmonie de l'univers.

En mathématiques, il est le premier à avoir utilisé le terme de « fonction », et il est co-inventeur avec Newton (▸ chapitre 2) du calcul infinitésimal, c'est-à-dire du calcul mathématique utilisant les dérivées. ■

Fonctions d'une variable réelle : les bases

Plan

1 Rappels sur les ensembles 2
2 Fonctions 34
3 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 13
4 Raisonnement par récurrence 17
5 Fonctions linéaires, fonctions affines 19
6 Fonctions usuelles 21

Objectifs

→ **Connaître** les bases élémentaires de la théorie des ensembles.
→ **Comprendre** ce qu'est une fonction.
→ **Savoir utiliser** les fonctions usuelles les plus simples.
→ **Découvrir** la notion de raisonnement par récurrence.

1 Rappels sur les ensembles

1.1 Introduction

Toute l'analyse mathématique moderne repose sur la théorie des ensembles. Nous n'allons pas commencer par faire un cours général sur la théorie des ensembles, car cela peut être très compliqué ! Nous allons seulement introduire le minimum indispensable.

Dans la vie courante, on a souvent besoin de regrouper des « objets » qui se ressemblent. Par exemple les habits de taille S, ou bien les élèves d'un lycée qui apprennent l'allemand, etc. Dans tous les cas on a une collection d'objets qui vont « ensemble » parce qu'ils ont quelque chose en commun.

Le symbole $\in$ signifie « appartient », et le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas ».

En mathématiques, on appelle une telle collection d'objets un **ensemble**, et chacun des objets en question est désigné par le nom d'**élément**. Par exemple, l'ensemble L des lettres de l'alphabet comporte 26 éléments. L'ensemble des voyelles comporte 6 éléments. Si on désigne par V ce dernier ensemble, alors $V = \{a; e; i; o; u; y\}$, et on note $a \in V$ pour signifier que la lettre a appartient à l'ensemble des voyelles. Comme b est une lettre mais n'est pas une voyelle, on note alors $b \in L$ mais $b \notin V$.

On peut définir un ensemble simplement en donnant la liste de ses éléments. On dit que l'ensemble est défini **en extension**. Par exemple $E = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

On peut aussi définir un ensemble en donnant une propriété qui caractérise ses éléments. On dit que l'ensemble est défini **en compréhension**. Par exemple on peut dire que E est l'ensemble des entiers compris entre 2 et 6. En notation mathématique, on écrit $E = \{x\,;\, x \text{ entier et } 2 \leq x \leq 6\}$.

On dit qu'un **ensemble** est **fini** s'il comporte un nombre fini d'éléments. On appelle **cardinal** de cet ensemble le nombre de ses éléments. Par exemple l'ensemble E que nous venons de considérer est fini, de cardinal égal à 5, et on note $card(E) = 5$.

On dit qu'un **ensemble** est **infini** s'il comporte un nombre infini d'éléments. Par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls est un ensemble infini.

Il est utile également de considérer un ensemble qui n'a aucun élément. On appelle **ensemble vide** un tel ensemble, et on le note $\varnothing$.

1.2 Opérations sur les ensembles

Considérons deux ensembles A et B.

Définition 1.1

Quand tous les éléments de l'ensemble A sont aussi éléments de l'ensemble B, on dit que A est **inclus** dans B et on note $A \subset B$. On dit aussi que A est une **partie** de B, ou que A est un **sous-ensemble** de B.

Remarquons que l'écriture mathématique de la phrase « tous les éléments de A sont aussi éléments de B » est :

$$\forall x, \qquad x \in A \Rightarrow x \in B$$

Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » et le symbole $\Rightarrow$ signifie « implique ».

Exemple 1.1

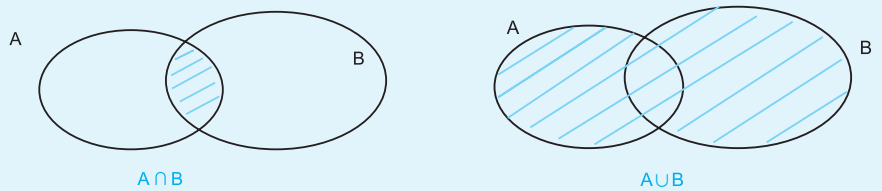
Toutes les voyelles sont des lettres, donc $V \subset L$. L'ensemble des voyelles est une « partie » de l'ensemble des lettres.

À partir de deux ensembles A et B, on peut former d'autres ensembles à l'aide des opérations « union » et « intersection ». On les définit de la façon suivante.

Définition 1.2

$A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B (ou dans les deux).
On lit « A union B ».
$A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
On lit « A inter B ».

Il est pratique de représenter graphiquement les ensembles à l'aide de diagrammes de forme ovale. On appelle ces représentations des **diagrammes de Venn**.



a L'intersection A ∩ B

b L'union A ∪ B

▲ **Figure 1.1** Diagrammes de Venn

Exemple 1.2

Notons D l'ensemble formé des 5 premières lettres de l'alphabet, c.-à-d. $D = \{a; b; c; d; e\}$.
Alors si V est l'ensemble des voyelles, on a :

$$V \cap D = \{a; e\} \quad \text{et} \quad V \cup D = \{a; b; c; d; e; i; o; u; y\}$$

L'union est la façon ensembliste de dire « ou », l'intersection est la façon ensembliste de dire « et ». Il est aussi utile de savoir dire « non » dans le langage de la théorie des ensembles. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 1.3

Si A et B sont deux ensembles, alors $A \setminus B$ désigne l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exemple 1.3

Si $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ et $B = \{6; 7; 8; 9; 10\}$, alors $A \setminus B = \{3; 4; 5\}$.

Définition 1.4

Si on est dans un ensemble E fixé, et qu'on considère uniquement des parties de E, alors **le complémentaire** de A dans E est l'ensemble de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. On note A^c cette partie de E.
Pour tout partie A de E, on a donc $A^c = E \setminus A = \{x \in E;\ x \notin A\}$.

Exemple 1.4

Dans l'ensemble des lettres, il est clair que $V^c = C$, où C est l'ensemble des consonnes. Autrement dit, le complémentaire de l'ensemble des voyelles est l'ensemble des consonnes.

Définition 1.5

Si E et F sont deux ensembles, on appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble de tous les couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Si $E = F$, le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2.
On peut aussi considérer le produit cartésien de n ensembles E_1, ..., E_n. C'est l'ensemble noté $E_1 \times \ldots \times E_n$, de tous les n-uplets $(x_1; \ldots; x_n)$, où $x_i \in E_i$ pour tout i. Si tous les E_i sont égaux, le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ est noté E^n.

Un couple $(x; y)$ est un ensemble ordonné de deux éléments. Un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un ensemble ordonné de n éléments.

Exemple 1.5

1. Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{2; 3\}$, alors $E \times F = \{(a; 2), (a; 3), (b; 2), (b; 3), (c; 2), (c; 3)\}$.
2. Si $E = \{j; k\}$, alors $E^2 = \{(j; j), (j; k), (k; j), (k; k)\}$.

Remarquons que dans un couple, l'ordre compte. Ainsi $(j; k) \neq (k; j)$. De même, dans un n-uplet $(x_1; \ldots; x_n)$, l'ordre compte.

1.3 Les ensembles de nombres

En mathématiques, on s'intéresse beaucoup aux nombres, donc aussi aux ensembles de nombres. Ce que nous venons de voir sur les ensembles s'applique bien sûr aux ensembles de nombres. Rappelons quels sont les principaux ensembles de nombres qu'il est utile de connaître.

1.3.1 Les nombres entiers et rationnels

- L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls est noté $\mathbb{N}$. On l'appelle aussi **ensemble des entiers naturels**. On a $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.
- L'ensemble des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls est noté $\mathbb{Z}$. On l'appelle aussi **ensemble des entiers relatifs**. On a $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$.

- L'**ensemble des nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$. C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme un entier divisé par un autre entier.

  On a $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\text{; où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}, \text{ avec } q \neq 0\right\}$.

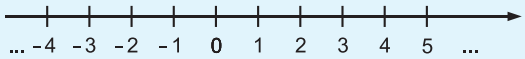
On ajoute en indice le signe + quand on veut se restreindre aux nombres positifs, et le signe – quand on veut se restreindre aux nombres négatifs. On met en exposant le signe * pour préciser que l'on enlève le nombre 0.

Exemple 1.6

$\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q};\ x \neq 0\}$
$\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0\}$
$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z};\ x \leq 0\}$

1.3.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Il est souvent pratique de représenter les nombres sur une droite. Les nombres entiers peuvent être ainsi représentés comme des graduations sur cette droite.



▲ **Figure 1.2** Les nombres sur la droite

On voit clairement qu'avec les nombres entiers, il y a des « trous » sur la droite. Autrement dit, il y a beaucoup plus de points sur la droite que de nombres entiers. Les points strictement compris entre 1 et 2 par exemple, ne correspondent à aucun entier.

Si on représente les nombres rationnels sur cette même droite, alors on a l'impression de « boucher les trous » entre les points représentant les entiers. En effet, il y a une infinité de rationnels compris par exemple entre 1 et 2. Bouche-t-on complètement tous les trous en procédant ainsi ? Autrement dit, toute longueur représentable sur la droite correspond-elle à un nombre rationnel ? On sait depuis l'Antiquité que la réponse est négative. Les anciens Grecs en effet savaient que si on considère un carré de côté 1, la longueur de la diagonale (que nous notons de nos jours $\sqrt{2}$) ne correspond à aucun rationnel.

Il n'existe pas d'entiers p et q tels que $\frac{p}{q}$ = longueur du côté de la diagonale = $\sqrt{2}$.

Cette découverte avait beaucoup perturbé les mathématiciens grecs. Bien que les rationnels soient très nombreux, quand on les représente sur une droite, il y a encore des trous ! Pour combler ces trous, c'est-à-dire pour que chaque point corresponde à un nombre, nous allons utiliser la notation décimale des nombres. Un entier s'écrit bien sûr sans chiffre après la virgule. Un rationnel non entier peut s'écrire avec un nombre fini ou infini de chiffres après la virgule.

Par exemple : $\frac{18}{5} = 3{,}6$; $\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots$; $\frac{72}{11} = 6{,}545454\ldots$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Si un rationnel s'écrit avec un nombre infini de chiffres après la virgule, alors son développement décimal[1] est toujours périodique. Pour combler les trous sur la ligne, il suffit d'accepter les développements décimaux infinis non périodiques. On appelle $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres qui ont une écriture décimale avec un nombre fini ou infini de chiffres après la virgule, que ce développement décimal soit périodique ou pas. Un tel nombre sera appelé nombre réel, et $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. Il est clair que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Comme pour $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, on a les notations :

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 0\}$$
$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq 0\}$$
$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \neq 0\}$$

1.3.3 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Nous avons vu que dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, il n'y a pas de solution à l'équation $x^2 = 2$ (la diagonale du carré de coté 1 n'est pas rationnelle). La construction de $\mathbb{R}$ permet d'avoir des solutions à l'équation $x^2 = 2$ (et aussi à $x^2 = 3$, etc.). Il serait utile aussi d'avoir des solutions à l'équation $x^2 = -1$. Mais dans $\mathbb{R}$ il n'y en a pas, car le carré d'un nombre réel est toujours positif.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes permet de résoudre ce type d'équations (et bien d'autres...). Cet ensemble est par construction plus grand que $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nous avons vu que $\mathbb{R}$ peut être représenté comme une droite (sans trous...). $\mathbb{C}$ peut être représenté comme un plan. Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet, car dans ce livre nous travaillerons seulement sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

1.3.4 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles sont des parties de $\mathbb{R}$ qui méritent une étude particulière.

Définition 1.6

Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que I est un **intervalle** si pour tout $x, y \in I$, l'ensemble I contient tous les nombres réels compris entre x et y.
On distingue les **intervalles fermés** (qui contiennent leurs extrémités), les **intervalles ouverts** (qui ne contiennent aucune de leurs extrémités) et les intervalles semi-ouverts.

Dans $\mathbb{R}$, on a des notations spécifiques pour les intervalles. Si a et b sont deux nombres réels donnés, avec $a < b$, alors on note :

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ qui est l'intervalle fermé d'extrémités a et b.

$]a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ qui est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.

On a aussi les intervalles semi-ouverts :

$[a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

$]a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

1 Le « développement décimal » signifie la suite des chiffres après la virgule. Il est périodique s'il est composé d'une même suite de chiffres répétée indéfiniment.

Enfin, il y a les intervalles non bornés :

$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$ qui est fermé

$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$ qui est ouvert

$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$ qui est fermé

$]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$ qui est ouvert

∞ est le symbole mathématique désignant l'infini.

L'ensemble vide est un intervalle, on peut par exemple l'écrire $\varnothing =]1; 1[$.

$\mathbb{R}$ est lui-même un intervalle. On peut l'écrire $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

On peut remarquer facilement qu'une intersection d'intervalles est un intervalle. En revanche, une union d'intervalles n'est pas forcément un intervalle.

Exemple 1.7

Intersections d'intervalles :

$[2; 5] \cap]3; 6] =]3; 5]$

$]-1; +6] \cap [2; +\infty[= [2; 6]$

$[2; 4] \cap [7; 10] = \varnothing$

Unions d'intervalles :

$[2; 15] \cup]5; 32[= [2; 32[$ est un intervalle.

$[2; 5] \cup]15; 32[$ n'est pas un intervalle.

Définition 1.7

L'**intérieur** d'un intervalle I est par définition cet intervalle auquel on a enlevé les extrémités. On le notera $\text{int}(I)$.
On dit que x_0 est un point intérieur à I s'il est élément de $\text{int}(I)$.

Exemple 1.8

Si $I = [3; 5]$, son intérieur est $\text{int}(I) =]3; 5[$

Si $I = [4; 8[$, son intérieur est $\text{int}(I) =]4; 8[$

Si $I = [2; +\infty[$, son intérieur est $\text{int}(I) =]2; +\infty[$

Définition 1.8

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie **au voisinage de** x_0 si elle est vraie pour tout x suffisamment proche de x_0, autrement dit s'il existe un nombre $r > 0$ (même petit), tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$.

Cette notion de propriété vraie « au voisinage de » est utile quand on parle de continuité ou de dérivabilité des fonctions (▶ chapitres 2 et 4).

Exemple 1.9

On peut dire que la propriété « $x(2 - x) \geq 0$ » est vraie au voisinage de $x_0 = 1$, car pour tout $x \in]0; 2[$, on a $x(2 - x) \geq 0$. Par contre cette propriété est fausse au voisinage de 2, car pour tout $x > 2$, on a $x(2 - x) < 0$ (même pour x très proche de 2).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

1.4 Majorants, minorants

Quand on considère un ensemble de nombre réels, même défini de façon un peu abstraite, il est utile de savoir si ses éléments sont bornés, c'est-à-dire encadrés par deux nombres donnés, ou bien s'ils peuvent être aussi grands que l'on veut. C'est l'objet des définitions suivantes. Considérons une partie non vide A de $\mathbb{R}$.

Définition 1.9

- On dit que A est **minorée** s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \leq x$ pour tout $x \in A$. On dit alors que k est un **minorant** de A.
- On dit que A est **majorée** s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $K \geq x$ pour tout $x \in A$. On dit alors que K est un **majorant** de A.
- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 1.10

– Soit $A_1 = [1; +\infty[$. Alors A_1 est minorée mais n'est pas majorée. Tous les nombres réels inférieurs ou égaux à 1 sont des minorants de A_1.

– Soit $A_2 = [-3; 7[$. Alors A_2 est minorée et majorée, donc bornée.

– Soit $A_3 = \mathbb{N}$. Alors A_3 est minorée par 0 mais pas majorée.

Définition 1.10

- On dit que A admet un **plus petit élément** s'il existe un élément m de A qui minore tous les autres. On note $m = \min(A)$.
- On dit que A admet un **plus grand élément** s'il existe un élément M de A qui majore tous les autres. On note $M = \max(A)$.

Exemple 1.11

Soit $A = [3; 5[$. Il est clair que A admet un plus petit élément qui est $m = 3$. Par contre, A n'admet pas de plus grand élément. (Le nombre 5 majore A mais il n'appartient pas à A.)

Proposition 1.1

– Si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble de ses majorants admet toujours un plus petit élément. On le note $\sup(A)$, et on l'appelle **borne supérieure** de A.

– Si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble de ses minorants admet toujours un plus grand élément. On le note $\inf(A)$, et on l'appelle **borne inférieure** de A.

Il s'agit d'une propriété importante de l'ensemble $\mathbb{R}$, que nous ne démontrerons pas. Notons que ceci n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, soit $B = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$. Cet ensemble est majoré dans $\mathbb{Q}$, mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Par contre, il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, il s'agit de $\sqrt{2}$.

Exemple 1.12

Soit $A =]2; +\infty[$. Ici A n'est pas majorée, donc n'a pas de borne supérieure. En revanche, elle est minorée ; sa borne inférieure est 2. Néanmoins elle n'a pas de plus petit élément.

2 Fonctions

2.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Dans la vie courante, on dit qu'une chose est « fonction » d'une autre, si la première chose dépend de la seconde. Par exemple, les vêtements qu'une personne porte sont fonction du temps qu'il fait. S'il pleut, elle porte un imperméable, s'il fait froid, elle porte un manteau, etc. En géométrie, la surface d'un carré est fonction du côté du carré : si le côté mesure 10 cm, alors la surface est 100 cm^2, si le côté mesure 20 cm, la surface est 400 cm^2, etc. En économie, on peut dire que le chômage est fonction de la croissance. Ces exemples vont nous aider à comprendre la définition mathématique d'une fonction.

Étant donnés deux ensembles A et B, on a la définition suivante.

Définition 1.11

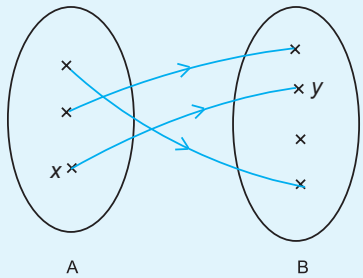
Une **fonction** f de A dans B est une règle qui, à chaque élément de A, associe au plus un élément de B.
Pour tout $x \in A$, on note $f(x)$ l'élément de B (s'il existe) qui lui est associé par la fonction f. On appelle A l'ensemble de départ, et B l'ensemble d'arrivée.

Notation

On peut résumer ce qui précède à l'aide de la notation symbolique suivante :

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Si on représente graphiquement les ensembles A et B par des diagrammes de Venn, il est d'usage de représenter la fonction f par des flèches qui vont des éléments de A vers les éléments de B (▶ figure 1.3).



▲ **Figure 1.3** Une fonction de A dans B

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exemple 1.13

On note le bénéfice d'une petite entreprise lors de quatre années consécutives dans le tableau suivant.

Année	2010	2011	2012	2013
Bénéfice (en euros)	17 235	18 201	16 475	16 953

On peut dire que le bénéfice est fonction de l'année. Écrivons-le mathématiquement, avec les notations précédentes. Ici A est l'ensemble des années, c'est-à-dire $A = \{2010; 2011; 2012; 2013\}$. De plus, B est l'ensemble des bénéfices possibles ; disons pour simplifier : $B = \mathbb{R}$. Notre fonction f associe ici à chaque année le bénéfice effectivement réalisé. On a donc :

$$f(2010) = 17\,235$$
$$f(2011) = 18\,201$$
$$f(2012) = 16\,475$$
$$f(2013) = 16\,953$$

Exemple 1.14

À chaque nombre entier positif ou nul, on associe le double de ce nombre. La fonction f est alors définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On ne peut pas comme dans l'exemple précédent énumérer chaque élément de l'ensemble de départ, puisque celui-ci est infini. On écrit alors plutôt :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{N}, \quad f(x) = 2x$$

Quand f est une fonction de A dans B, écrire $y = f(x)$ signifie donc que l'on a : $x \in A$, $y \in B$, et y est associé à x par la fonction f. On dit alors que y est l'**image** de x par f, et que x est l'**antécédent** de y par f.

Dans notre exemple 1.13, le nombre 17 235 est l'image de 2010 par f, et 2010 est l'antécédent de 17 235 par f.

Dans notre exemple 1.14, le nombre 16 est l'image de 8 par f, et 8 est l'antécédent de 16 par f.

Remarquons que dans notre définition de la notion de fonction, nous avons dit que f associe au plus un élément de B à chaque élément de A. Tout élément x de A a donc zéro ou une image par la fonction f. Quand on étudie la fonction f, les éléments de A qui nous intéressent sont ceux qui ont une image. C'est pourquoi on introduit les définitions suivantes.

Définition 1.12

Si f est une fonction de A dans B, on appelle **domaine de définition** de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. On le note D_f.
L'**image** de f est l'ensemble des éléments de B qui sont l'image d'au moins un élément de A. On la note $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(A)$.