

ÉLECTRONIQUE ANALOGIQUE

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



ÉDITEUR DE SAVOIRS

Sous la direction de **Bernard Latorre**
Corinne Berland, François de Dieuleveult, Christophe Delabie,
Olivier Français, Patrick Poulichet

ÉLECTRONIQUE ANALOGIQUE

Composants et systèmes complexes

DUNOD

Illustration de couverture : Silent_GOS – istockphoto.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	--

© Dunod, 2018

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077566-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.



Grandeurs physiques et électriques

1.1 Lois fondamentales et définitions

1.1.1 Bref historique

Nous utiliserons le système d'unités internationales (SI). Les unités de base sont les suivantes :

- ▶ mètre : unité de longueur ;
- ▶ kilogramme : unité de masse ;
- ▶ seconde : unité de temps ;
- ▶ ampère : unité d'intensité de courant ;
- ▶ kelvin : unité de température ;
- ▶ candela : unité d'intensité lumineuse.

1.1.2 Unités géométriques, cinématiques et mécaniques

Voir tableaux 1.1 et 1.2.

Tableau 1.1 Unités géométriques, cinématiques et mécaniques

Grandeur	Nature	Symbole	Unité	Relation de définition
Longueur	vectorielle	λ ou l	mètre, m	Unité de base
Temps	scalaire	t	seconde, s	Unité de base
Masse	scalaire	m	kilogramme, kg	Unité de base
Surface	scalaire	S	mètre carré, m^2	$S = \lambda^2$
Angle plan	scalaire	α	radian, rad	$\alpha = \lambda/R^2$ (R : rayon du cercle)
Angle solide	scalaire	Ω	stéradian, sr	$\Omega = S/R^2$
Vitesse	vectorielle	v ou \mathbf{v}	m/s	$\mathbf{v} = \Delta l/\Delta t$
Accélération	vectorielle	γ	m/s^2	$\gamma = \Delta \mathbf{v}/\Delta t$

Grandeur	Nature	Symbole	Unité	Relation de définition
Pulsation	scalaire	ω	rad/s	$\omega = \Delta\alpha/\Delta t$
Fréquence	scalaire	f	hertz, Hz	$f = \omega/2\pi$
Force	vectorielle	F ou \mathbf{F}	newton, N	$\mathbf{F} = m \gamma$
Travail et énergie	scalaire	W	joule, J	$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$ $\Delta W = \mathbf{F} \Delta l$
Puissance	scalaire	P	watt, W	$P = \Delta W/\Delta t$

Pour s'adapter à la taille de la grandeur à mesurer, on est amené à utiliser des multiples et sous-multiples des unités de base.

Tableau 1.2 Multiples, sous-multiples et unités différentes couramment utilisées

Grandeur	Unité de base	Multiples et unités diverses
Longueur	mètre, m	micromètre, μm : $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ (anciennement micron, μ) nanomètre, nm : $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ angstrom, \AA : $1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$
Temps	seconde, s	picoseconde, ps : $1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$
Angle plan	radian, rad	tour, tr : $1 \text{ tr} = 2 \pi \text{ rad}$
Angle solide	stéradian, sr	spat, spt : $1 \text{ spt} = 4 \pi \text{ sr}$
Fréquence	hertz, Hz	kilohertz, kHz : $1 \text{ kHz} = 10^3 \text{ Hz}$ mégahertz, MHz : $1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}$ gigahertz, GHz : $1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$
Force	newton, N	kilogramme-force, kgf : $1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ N}$
Puissance	watt, W	cheval vapeur, ch : $1 \text{ ch} = 735 \text{ W}$
Énergie ou travail	joule, J	watt-heure, Wh : $1 \text{ Wh} = 3\,600 \text{ J}$ kilowatt-heure, kWh : $1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$

1.1.3 Unités électriques et électromagnétiques

La définition de l'unité d'intensité, l'ampère, est la suivante : « l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produit, entre ces conducteurs, une force de $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ de longueur ».

1.1 Lois fondamentales et définitions

1.1.4 Lois fondamentales en électricité

Tableau 1.3 Grandeurs et unités électriques

Grandeur	Nature	Symbole	Unité	Relation de définition
Courant	scalaire	I	ampère, A	unité de base
Densité de courant	vectorielle	J	A/m ²	$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$
Quantité d'électricité	scalaire	Q	coulomb, C	$Q = I t$ ou $\Delta Q = I \Delta t$
Tension, différence de potentiel	scalaire	U ou V	volt, V	$\Delta U = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
Champ électrique	vectorielle	E	V/m	$U = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}$
Charge volumique	scalaire	ρ	C/m ³ , C/m ²	$Q = \rho V$ ou $\Delta Q = \rho dv$
Déplacement (induction électrique)	vectorielle	D		$\text{div } \mathbf{D} = \rho$
Capacité	scalaire	C	farad, F	$Q = C U$
Permittivité	scalaire	ϵ	F/m	Condensateur plan : $C = \epsilon S/e$ S : surface e : épaisseur
Permittivité relative	scalaire	ϵ_r	(sans dim.)	$\epsilon_0 = 1/(36 \pi) \times 10^{-9}$ F/m
Polarisation électrique	vectorielle	P	C/m ²	$P = D - \epsilon_0 E$
Résistance	scalaire	R	Ω , ohm	$R = V/I$
Conductance	vectorielle	G	S, Siemens	$G = I/V$
Résistivité	scalaire	ρ	$\Omega \cdot m$	$\rho J = E$
Conductivité	scalaire	γ	S/m	$\gamma = 1/\rho$

Tableau 1.4 Grandeurs magnétiques et électromagnétiques

Grandeur	Nature	Symbole	Unité	Relation de définition
Inductance propre	scalaire	L	henry, H	$U = L \Delta I / \Delta t$
Inductance mutuelle	scalaire	M	henry, H	$U = M \Delta I / \Delta t$
Flux d'induction magnétique	scalaire	Φ	weber, Wb	$\Delta \Phi = U \Delta t$
Induction magnétique	vectorielle	B ou \mathbf{B}	tesla, T	$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

Grandeur	Nature	Symbole	Unité	Relation de définition
Champ (d'excitation) magnétique	vectorielle	H ou \mathbf{H}	A/m	$I = \int_C \mathbf{H} \, d\mathbf{l}$ C = courbe fermée
Perméabilité	scalaire	μ_0	H/m	$\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7}$
Perméabilité magnétique	scalaire	μ	H/m	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ $L = \mu N^2 S / l^{(*)}$
Perméabilité relative	scalaire	μ_r	(sans dim.)	$\mu = \mu_0 \mu_r$
Force magnétomotrice	scalaire	F	ampère, A	$F = \int_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l}$
Réductance	scalaire	R	H ⁻¹	$F = R \phi$
Polarisation magnétique	vectorielle	J	tesla, T	$J_i = J - \mu_0 \cdot H$
Densité de flux d'énergie du champ électromagnétique, vecteur de Poynting	vectorielle	P	W/m ²	$P = E \wedge H$

(*) Solénoïde de longueur l composée de N spires.

Électrostatique

Le potentiel électrique U , dû à n charges ponctuelles, chacune d'elles de valeur Q_i étant placée à une distance r_i du point considéré est donné par :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (1.1)$$

et le champ électrique \mathbf{E} est évalué selon :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U \quad (1.2)$$

La force électrique \mathbf{F}_e , s'exerçant sur une charge électrique ponctuelle de valeur Q , soumise au champ électrique \mathbf{E} , a pour expression :

$$\mathbf{F}_e = Q \mathbf{E} \quad (1.3)$$

Si une charge électrique ponctuelle de valeur Q est portée respectivement aux potentiels électriques U_1 et U_2 , le travail électrique qui en résulte est :

$$W_e = Q (U_1 - U_2) \quad (1.4)$$

L'énergie électrostatique W_e emmagasinée par un condensateur de capacité C , porté au potentiel U est donnée par :

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U \quad (1.5)$$

avec $Q = C U$.

1.1 Lois fondamentales et définitions

On notera que le potentiel électrique est évalué à une constante près, et conformément à l'usage, dans la plupart des formules précédentes, on a supposé que le potentiel dû à une charge ponctuelle en un point infiniment éloigné de cette dernière est nul.

Courant électrique

La densité de courant total \mathbf{J}_T , est la somme de la densité du courant de conduction \mathbf{J}_C et de la densité du courant de déplacement \mathbf{J}_D :

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J}_C + \mathbf{J}_D \quad (1.6)$$

avec $\mathbf{J}_C = \gamma \mathbf{E} = \rho \mathbf{v}$

ρ étant la charge volumique, \mathbf{v} la vitesse de déplacement des charges, μ_e étant la mobilité de la charge, \mathbf{v} est donné par :

$$\mathbf{v} = \mu_e \mathbf{E}$$

d'où :

$$\gamma = \rho \mu_e$$

Quand l'intensité I est constante, ou lorsque \mathbf{J}_D est négligeable devant \mathbf{J}_C , on écrit :

$$I = \iint_S \mathbf{J}_C \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.7)$$

Champ et induction magnétique

C étant une courbe fermée entourant un conducteur parcouru par un courant I , le théorème d'Ampère permet d'évaluer la circulation du champ magnétique le long de cette courbe selon :

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{I} = NI \quad \forall C \quad (1.8)$$

N étant le nombre de tours complets effectués.

$d\mathbf{l}$ étant un élément de circuit (fig. 1.1) parcouru par un courant I placé en A , la loi de Biot et Savart permet d'évaluer l'induction magnétique $d\mathbf{B}$, en un point M , placé à une distance r de A , due à $d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) \wedge I d\mathbf{l} \quad (1.9)$$

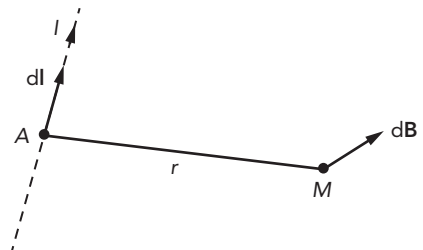


Figure 1.1

Force et travail électromagnétique

Le flux magnétique à travers une surface S est égal à :

$$\varphi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.10)$$

Toute variation de flux est accompagnée de la naissance d'une force électromotrice induite e , donnée par la loi de Lenz ou la règle de Faraday :

$$e = - d\phi/dt \quad (1.11)$$

Un élément de circuit $d\mathbf{l}$, parcouru par un courant I , plongé dans un milieu où règne l'induction magnétique \mathbf{B} , est soumis à une force magnétique $d\mathbf{F}_M$, donnée par la loi de Laplace :

$$d\mathbf{F}_M = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \quad (1.12)$$

Le flux magnétique capté par un circuit parcouru par un courant I a pour expression :

$$\phi = LI \quad (1.13)$$

Si on considère deux circuits voisins, dont l'un est parcouru par un courant I , le flux magnétique capté par l'autre est donné par :

$$\phi = MI \quad (1.14)$$

Sous l'action d'une force magnétique, un élément de circuit est soumis à une translation $d\mathbf{l}$. I étant le courant traversant l'élément de circuit, il en résulte le travail élémentaire :

$$dW = \mathbf{F}_M d\mathbf{l} = I d\phi \quad (1.15)$$

$d\phi$ est la variation de flux résultant du déplacement.

1.1.5 Température. Chaleur. Circuit thermique

Température

La température (symbole θ) exprimée précédemment en degrés centigrades ou centésimaux (symbole $^{\circ}\text{C}$), était à l'origine une grandeur repérable. L'échelle Celsius est définie par référence à l'échelle Kelvin qui sert à exprimer la température thermodynamique (grandeur mesurable, symbole T). Le kelvin (K) est la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau. La relation (1.16) compare la température en degré Celsius à celle en degré Kelvin :

$$\theta (^{\circ}\text{C}) = (T - 273,15) \text{ K} \quad (1.16)$$

Chaleur

L'unité de quantité de chaleur SI est le joule. On utilise, hors système, comme unité pratique, la calorie, appelée précédemment petite calorie.

$$1 \text{ cal (calorie) vaut } 4,186 \text{ 8 J (joules)} \quad (1.17)$$

Circuit thermique

La résistance traversée par un courant continu I , est une source de chaleur qui fournit, pendant t secondes, une quantité de chaleur exprimée en joules égale à :

$$W = RI^2 t$$

Un corps chaud, plongé dans un milieu à température plus basse se refroidit en cédant son énergie de trois façons :

1.1 Lois fondamentales et définitions

- ▶ par conduction (cheminement le long des conducteurs) ;
- ▶ par convection (échauffement et circulation du fluide environnant) ;
- ▶ par rayonnement (sans contact).

Considérons un dispositif dissipant une certaine puissance, émettant par conséquent une puissance thermique P_{th} .

En régime établi, si T_j est la température de la source, et T_A celle de la température ambiante, on peut admettre qu'il y a proportionnalité entre l'élévation de la température $T_j - T_A$ et la puissance thermique P_{th} , d'où l'écriture :

$$T_j - T_A = R_{th} P_{th} \quad (1.18)$$

R_{th} est la résistance thermique, qui s'exprime en degrés Celsius par watt.

Le réseau thermique équivalent de la figure 1.2 rend compte de cette relation.

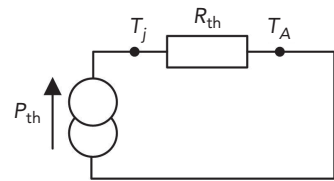


Figure 1.2

1.1.6 Photométrie

Longueurs d'onde. Spectre visible

Les longueurs d'onde des ondes électromagnétiques du domaine visible s'échelonnent approximativement entre $0,4 \mu\text{m}$ et $0,75 \mu\text{m}$. Le maximum d'efficacité pour l'œil humain se situe au voisinage de $0,55 \mu\text{m}$. Le domaine infrarouge couvre pratiquement le domaine allant de $0,8 \mu\text{m}$ à $100 \mu\text{m}$.

Candela et grandeurs photométriques

La candela est l'unité d'intensité lumineuse.

L'intensité lumineuse est une grandeur vectorielle \mathbf{I} . Posons $|\mathbf{I}| = I$.

L'exittance ou émittance \mathbf{E} désigne le flux lumineux qui rayonne. En un point à une distance ℓ de la source, on a :

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} / \ell^2 \quad (1.19)$$

Le flux lumineux $d\phi$, capté à travers une surface dS , est donné par :

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{I} dS^2}{\ell^2} = I d\Omega \quad (1.20)$$

$d\Omega$ étant l'angle solide sous lequel est vu, de la source lumineuse, l'élément de surface dS .

Tableau 1.5 Grandeurs photométriques

Grandeurs	Nature	Symbole	Unité	Relation de définition
Intensité lumineuse	vectorielle	I ou \mathbf{I}	candela, cd	unité de base
Flux lumineux	scalaire	$d\phi$	lumen, lm	$d\phi = I d\Omega^{(*)}$
Exittance (éclairage)	vectorielle	E ou \mathbf{E}	lux, lx	$d\phi = \mathbf{E} d\mathbf{S}^{(*)}$

(*) $d\Omega$ est exprimé en stéradian, dS en mètre carré.

On voit donc que : $1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/sr}$.

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2.$$

I peut également être exprimé en watt/stéradian et E en watt/m².

1.1.7 Unités anglo-saxonnes et américaines courantes

Tableau 1.6

Nature de la grandeur	Unité	Équivalence
Longueur	inch (pouce)	1 in = 25,4 mm
	foot (pied)	1 ft = 12 in = 30,4 cm
Masse	ounce pound	1 oz = 28,352 g
		1 lb = 0,453 592 kg
Force	pound-weight	1 lb = 4,448 2 N
Énergie Puissance	1 HP (<i>British</i>)	1 HP = 745,7 W
Température	Température Fahrenheit	θ (°F) = 32 + 1,8 θ (°C)

1.2 Notions de mathématiques

1.2.1 Grandeurs complexes

Définitions générales et écritures

R est le corps des nombres réels.

Étant donné $Z = (x, y)$, $x, y \in R$, l'ensemble $R \times R$ muni des deux lois :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

est un corps des complexes noté C :

$$z \in C$$

On a, d'autre part :

$$j = (0, 1) \text{ et } j^2 = (-1, 0)$$

et on peut utiliser l'écriture :

$$z = x + jy$$

x est la partie réelle de z et y est la partie imaginaire de z .

Soit :

$$z^* = z \text{ conjugué} = x - jy.$$

1.2 Notions de mathématiques

On peut représenter z par un vecteur \mathbf{OM} dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, de telle manière que :

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

On peut faire intervenir les coordonnées polaires (fig. 1.3).

Dans ce cas :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = y/x$$

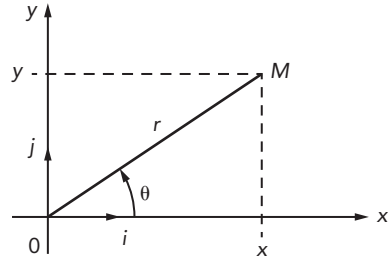


Figure 1.3

et on pourra adopter une autre écriture :

$$z = x + jy = r e^{j\theta}$$

Formules principales

Tableau 1.7

$z = (x, y) = (r, \theta)$	$z = x + jy = r e^{j\theta}$
$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$	$r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\operatorname{tg} \theta = y/x, \theta \in [0, \pi]$ $\operatorname{sgn} \theta = \operatorname{sgn} y$
$z_1 = (x_1, y_1) = (r_1, \theta_1)$ $z_2 = (x_2, y_2) = (r_2, \theta_2)$	$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $z_1 z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$
$z = (r, \theta)$ $\forall m \in \mathbb{R}$	$z^m = (r^m, m\theta)$ $z^m = r^m \cos(m\theta) + j \cdot r^m \cdot \sin(m\theta)$ $z^m = (r \cos \theta + jr \sin \theta)^m$
$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$	$\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$ $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$

Grandeurs électriques complexes

Si le régime considéré est sinusoïdal ou harmonique, il est commode d'utiliser des grandeurs électriques complexes.

Une différence de potentiel u étant appliquée aux bornes d'un dipôle présentant un comportement linéaire, un courant i le traverse (fig. 1.4), et en régime établi, si $u = U \cos \omega t$, on aura :

$$i = I \cos (\omega t + \phi).$$

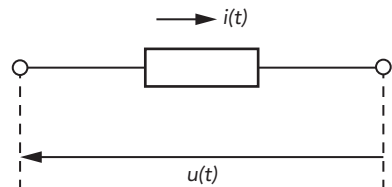


Figure 1.4

Utilisons les grandeurs complexes (dont les symboles seront soulignés) :

$$\underline{U} = U e^{j\omega t}, \quad \underline{I} = I e^{j(\omega t + \phi)}$$

La loi d'Ohm est applicable, en introduisant l'impédance complexe :

$$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = R + jX$$

R est la résistance, X la réactance, qui peuvent être fonctions toutes deux de la pulsation ω .

On peut s'intéresser également à l'admittance complexe :

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = \underline{I}/\underline{U} = G + jB$$

G est la conductance, B la susceptance.

On aura :

$$\underline{Z} = Z e^{j\psi}$$

avec

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2} \tag{1.21}$$

$$\text{tg } \psi = X/R$$

et

$$I = U/Z = U/\sqrt{X^2 + R^2} \tag{1.22}$$

On constate que :

$$\text{tg } \phi = \text{tg } (-\psi) = -X/R \tag{1.23}$$

La puissance complexe \underline{P} se calcule selon :

$$P = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^* = P_a + jP_r$$

P_a étant la puissance active et P_r la puissance réactive.

On trouve, en l'occurrence :

$$P_a = \frac{1}{2} UI \cos \phi, \quad P_r = \frac{1}{2} UI \sin(-\phi) \tag{1.24}$$

Considérons cette fois un sous-ensemble électronique (fig. 1.5), captant ou recevant une grandeur électrique $x(t)$, sous forme de courant ou tension, et délivrant une grandeur électrique $y(t)$, également sous forme de courant ou tension.

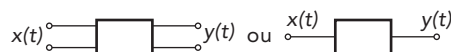


Figure 1.5

à $x = X \cos \omega t$, et $y = Y \cos (\omega t + \phi)$, on fait correspondre des grandeurs complexes :

$$\underline{X} = X e^{j\omega t}, \quad \underline{Y} = Y e^{j(\omega t + \phi)}$$

1.2 Notions de mathématiques

Le sous-ensemble présentant un comportement linéaire, on aura en régime établi :

$$\underline{Y} = \underline{T} \underline{X}$$

\underline{T} est la transmittance du sous-ensemble considéré.

Soit

$$\underline{T} = T(\omega) e^{j\psi(\omega)}$$

On obtient :

$$\begin{cases} Y = T(\omega)X \\ \varphi = \psi(\omega) \end{cases} \quad (1.25)$$

ce qui permet d'analyser le comportement en amplitude et en phase du sous-ensemble en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence $f = \omega/2\pi$.

Logarithmes et décibels

Logarithmes

Logarithme naturel (ou népérien)

$$\ln x = \int_1^x \frac{du}{u}$$

Logarithme à base 10

$$\text{Log}_{10} x = \ln x / \ln 10$$

Propriétés

$\ln e = 1$, e : base des logarithmes népériens $e = 2,718\ 28$.

$\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} e = 0,434\ 29$.

$\ln x = \log_{10} x / \log_{10} e = 2,302\ 6 \text{Log}_{10} x$.

$\log_{10} x^a = a \log_{10} x$, $\log_{10} x_1 x_2 = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2$.

$z = \rho e^{j(\theta + 2k\pi)} \Rightarrow \ln z = \ln \rho + j(\theta + 2k\pi)$.

Décibels

Les gains en tension ou courant et les gains en puissance sont souvent exprimés en décibels. Le décibel est défini comme suit :

V_1 et V_2 étant les tensions d'entrée et de sortie :

$$A_v \text{ en décibels} = A_{v(\text{dB})} = 20 \log_{10} (V_2/V_1)$$

I_1 et I_2 étant les courants d'entrée et de sortie :

$$A_i \text{ en décibels} = A_{i(\text{dB})} = 20 \log_{10} (I_2/I_1)$$

P_1 et P_2 étant la puissance d'entrée et la puissance de sortie délivrées :

$$G \text{ en décibels} = G_{(\text{dB})} = 10 \log_{10} (P_2/P_1)$$

$$G_{(\text{dB})} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{V_2 I_2}{V_1 I_1} \right) = \frac{1}{2} [A_v + A_i]_{\text{dB}}$$

1.2.2 Signal périodique. Série de Fourier

Une fonction périodique $x(t)$ est caractérisée par :

$$x(t + kT) = x(t) \quad \forall k \text{ entier, } T \text{ étant la période.}$$

Un signal périodique est parfaitement décrit par la superposition de signaux sinusoïdaux purs de même fréquence $1/T$, ou de fréquences $n/T = n \cdot \omega/(2\pi)$. On montre que :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt$$

À titre d'exemple, considérons le signal rectangulaire et périodique (fig. 1.6) à décomposer en série de Fourier.

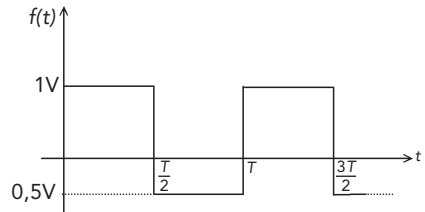


Figure 1.6

Calcul de A_0

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (1) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-0,5) \cdot dt = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + (-0,5) \frac{T}{2} \right) = 0,25 \text{ V}$$

La valeur moyenne est de 0,25 volt.

Calcul des coefficients A_n

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \cos n\omega t \cdot dt + \int_{T/2}^T (-0,5) \cos n\omega t \cdot dt \right)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \left(\frac{1}{n\omega} [\sin n\omega t]_0^{T/2} - \frac{1}{2n\omega} [\sin n\omega t]_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{1}{n\omega} \left(\sin n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2n\omega} \left(\sin n \frac{2\pi}{T} T - \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

1.2 Notions de mathématiques

Les coefficients A_n sont nuls car la fonction $f(t)$, débarrassée de sa composante continue, est impaire. Comme elle est impaire, elle ne peut être représentée par des cosinus qui eux sont pairs.

Calcul des coefficients B_n

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \sin n\omega t \cdot dt + \int_{T/2}^T (-0,5) \sin n\omega t \cdot dt \right)$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left(\frac{1}{n\omega} [-\cos n\omega t]_0^{T/2} - \frac{1}{2n\omega} [-\cos n\omega t]_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{1}{n\omega} \left(1 - \cos n \frac{2\pi T}{T} \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2n\omega} \left(\cos n \frac{2\pi T}{T} \frac{1}{2} - \cos n \frac{2\pi T}{T} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= 2 \left(\frac{1}{n2\pi} (1 - \cos n\pi) - \frac{1}{2} \frac{1}{n2\pi} (\cos n\pi - \cos 2n\pi) \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(1 - (-1)^n - \frac{1}{2} (-1)^n + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{n\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} (-1)^n \right) \end{aligned}$$

$$B_n = \frac{3}{2} \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

$$B_1 = \frac{3}{2} \frac{1}{\pi} 2 = \frac{3}{\pi} \qquad B_2 = 0$$

$$B_3 = \frac{3}{6} \frac{1}{\pi} 2 = \frac{1}{\pi} \qquad B_4 = 0$$

$$B_5 = \frac{3}{2} \frac{1}{5\pi} 2 = \frac{3}{5\pi} \qquad B_6 = 0$$

$$B_7 = \frac{3}{7\pi} \qquad B_8 = 0$$

La fonction $f(t)$ (fig. 1.6) peut donc s'écrire sous la forme :

$$f(t) = 0,25 + \frac{3}{\pi} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{\pi} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{3}{5\pi} \cdot \sin(5\omega t) + \frac{3}{7\pi} \cdot \sin(7\omega t) + \frac{1}{3\pi} \cdot \sin(9\omega t) \dots$$

Voyons maintenant ce que cela donne quand on compare le signal de la figure 1.6 et son équivalent calculé à partir de la relation précédente.

Composition avec quelques harmoniques

Considérons le signal composé de quelques harmoniques : H1 à la fréquence de 1 kHz, H3 à la fréquence de 3 kHz et H5 à la fréquence de 5 kHz... Plus le nombre d'harmoniques est grand et plus la similitude entre le signal original et la reconstruction est grande.